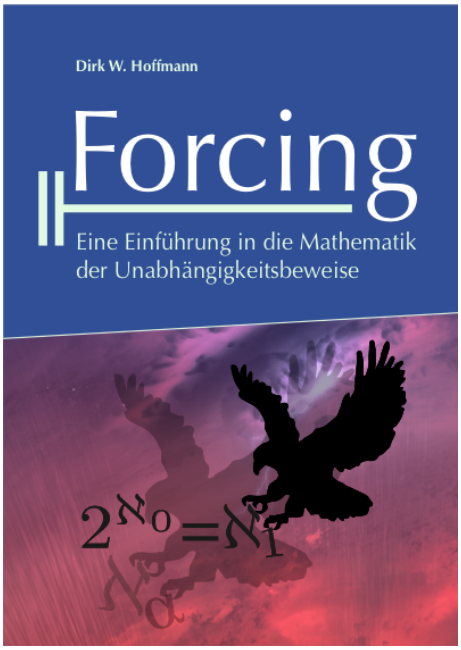
Dirk W. Hoffmann

Forcing

Eine Einführung in die Mathematik der Unabhängigkeitsbeweise

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Erste Auflage

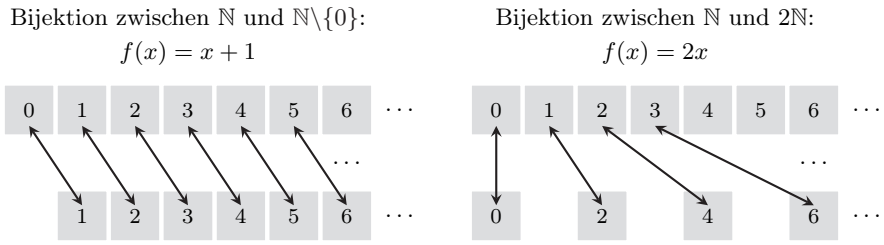


http://www.dirkwhoffmann.de/forcing

1 Einleitung

Lösung zu Aufgabe 1.1

a) Die Mengen lassen sich z. B. folgendermaßen aufeinander abbilden:



b) Für eine unendliche Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ definieren wir die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} f(0) &:= \text{die kleinste Zahl in } A \\ f(1) &:= \text{die kleinste Zahl in } A \setminus \{f(0)\} \\ f(2) &:= \text{die kleinste Zahl in } A \setminus \{f(0), f(1)\} \\ &\dots \end{aligned}$$

Die Funktion f ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A. Die Injektivität folgt direkt aus der Konstruktion und die Surjektivität aus der Tatsache, dass für jedes Element $a \in A$ nur endlich viele Zahlen in A existieren, die kleiner als a sind. Ist n die Anzahl der kleineren Zahlen, so ist $f(n) = a$.

c) Auf die Eigenschaft der natürlichen Zahlen, wohlgeordnet zu sein: In jeder Teilmenge der natürlichen Zahlen existiert ein kleinstes Element.

Lösung zu Aufgabe 1.2

Es sei (x, y) ein beliebiges Feld. Um zu klären, an welcher Stelle dieses Feld in der Aufzählung vorkommt, halten wir zunächst fest, dass sich $x + y$ Diagonalen links oberhalb des Felds (x, y) befinden. Die Anzahl der Felder dieser Diagonalen lässt sich

über die Gauß'sche Summenformel berechnen und beträgt:

$$1 + 2 + \ldots + (x + y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2}$$

Hinzu kommen noch $(y + 1)$ Felder der Diagonalen, auf der sich (x, y) selbst befindet. Da der kleinste Funktionswert von f gleich 0 ist, entspricht der Funktionswert der Anzahl der durchlaufenen Felder minus 1 und wir erhalten:

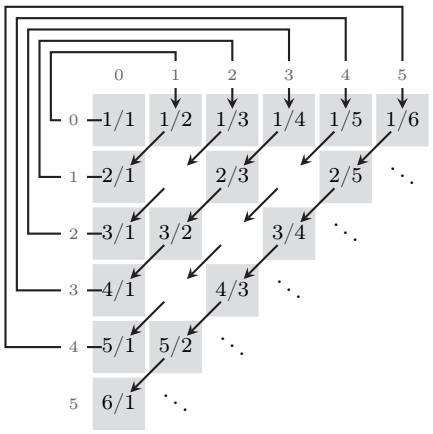
$$f(x, y) = (y + 1) + \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} - 1 = y + \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2}$$

Lösung zu Aufgabe 1.3

a)

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}, \ldots$$

b) Wir erhalten die Aufzählung, wenn wir die Brüche in die Matrix aus Abbildung 1.2 eintragen, sodass der Bruch $\frac{m}{n}$ in der m-ten Zeile und der n-ten Spalte vorkommt und jene Felder übersprungen werden, die ungekürzten Brüchen entsprechen.



Lösung zu Aufgabe 1.4

a) Die Diagonalzahl ist die Zahl

$$0,000111\ldots$$

Dies Ziffernfolge ist aber nur eine andere Darstellung für die Zahl $0,001$, die in unserer Tabelle in der Zeile von $f(5)$ vorkommt. Wir stehen hier vor dem Problem, dass die Darstellung einer reellen Zahl nicht immer eindeutig ist, wenn wir diese als eine Folge von Nullen und Einsen darstellen.

b) Im Dezimalsystem tritt das Phänomen ebenfalls auf, allerdings nur im Zusammenhang mit den Ziffern 0 und 9. Im Dezimalsystem können wir das Problem aber ganz einfach dadurch umgehen, dass wir die Ziffer 9 von der konstruierten Diagonalzahl fernhalten. In Abbildung 1.4 haben wir dies erreicht, indem die Diagonalziffern kleiner als 5 um eins erhöht und alle anderen um eins erniedrigt wurden.

Lösung zu Aufgabe 1.5

a) Jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ist algebraisch, da sie die Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$q \cdot x - p = 0$$

b) Für die Gleichung aus Teil a) ist $n = 1$, $a_1 = q$ und $a_0 = 1$. Somit ist

$$h = (n-1) + a_1 + a_0 = 0 + 1 + 1 = 2.$$

c) Der größte Index n mit $a_n \neq 0$ heißt der *Grad* einer algebraischen Gleichung. Ist $a_n = 1$ und alle anderen Koeffizienten gleich 0, so hat die algebraische Gleichung die Höhe n. Für alle anderen algebraischen Gleichungen vom Grad n kann die Höhe nur größer werden, sodass wir das folgende Zwischenergebnis erhalten: Die Höhe h einer algebraischen Gleichung vom Grad n ist mindestens so groß wie n. Eine algebraische Gleichung vom Grad n hat höchstens n verschiedene Lösungen, und damit gilt, dass sie höchstens h verschiedene Lösungen hat.

d) $\sqrt{2}$ ist eine algebraische Zahl, da sie die Lösung der Gleichung $x^2 - 2 = 0$ ist.

e) Zu jeder Höhe h existieren nur endlich viele algebraische Gleichungen, und jede dieser Gleichungen hat maximal h Lösungen. Damit sind wir in der Lage, die Lösungen der algebraischen Zahlen der Reihe nach aufzuzählen. Das bedeutet, dass es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt. Somit kann nicht jede reelle Zahl algebraisch sein.

Lösung zu Aufgabe 1.6

Nein, denn es treten zwei Probleme auf:

1. Gehen wir wie beschrieben vor, so gibt es mehrere Teilmengen der natürlichen Zahlen, die die gleiche reelle Zahl beschreiben. Beispielsweise entspricht die Menge $\{1\}$ der Binärzahl $0,1_2$. Diese Zahl ist aber mit der Zahl $0,0\overline{1}_2$ identisch, die durch die Menge $\{2,3,4,\ldots\}$ beschrieben wird.

2. Die Menge $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ entspricht der Zahl $0,\overline{1}_2$. Dies ist aber nur eine andere Darstellung der Zahl 1, die nicht in $[0\,;1)$ enthalten ist.

Dies zeigt, dass es gar nicht so einfach ist, eine Bijektion zwischen der Menge $[0\,;1)$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N}\backslash\{0\})$ zu konstruieren, und wir stehen dem gleichen Problem gegenüber, wenn wir versuchen, die Menge $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzubilden. Das Problem ist jedoch hauptsächlich ein technisches, da wir mit den typischen Doppeldarstellungen zu kämpfen haben, wenn wir Zahlen in den gängigen Stellenwertsystemen aufschreiben. In Kapitel 2 werden wir diese Problem mithilfe des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein lösen. Mit ihm lässt sich mit wenigen Federstrichen belegen, dass die Mengen $[0\,;1)$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N}\backslash\{0\})$ gleichmächtig sind. Genauso einfach ist es mit diesem Satz, die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ als gleichmächtig zu identifizieren, und damit ist es legitim, wenn wir uns auf Seite 18 erlauben, „beide Mengen im Geiste miteinander zu identifizieren“.

Lösung zu Aufgabe 1.7

Der Widerspruch entspringt dem verbreiteten Missverständnis, in dem formalen System ZFC eine Definition des Mengenbegriffs zu sehen. Dies würde in der Tat bedeuten, dass wir alles, was wir bisher über Mengen wissen, bei der Analyse von ZFC über Bord werden müssten. An dieser Stelle ist es wichtig, zwischen der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre und dem formalen System ZFC zu unterscheiden. Erstere können wir tatsächlich als eine Definition des Mengenbegriffs auffassen. Sie wird durch die Axiome gebildet, die von Zermelo und Fraenkel umgangssprachlich formuliert wurden, und auf diesen Axiomen ist unser Wissen über Mengen aufgebaut. In den anderen Gebieten der Mathematik wie der Analysis oder der Topologie greifen wir wie selbstverständlich auf den Mengenbegriff zurück, und es gibt keinen Grund, den Mengenbegriff in Frage zu stellen, wenn wir damit ein formales System analysieren, auch wenn dieses System den Namen ZFC trägt. An dieser Stelle ist es hilfreich sich daran zu erinnern, dass ein formales System in letzter Konsequenz nichts anderes ist als ein formales Regelwerk zur Manipulation von Zeichenketten ist. Für die Analyse, ob in einem solchen Regelwerk bestimmte Zeichenketten abgeleitet werden können oder nicht, und nichts anderes ist die Frage nach der Beweisbarkeit oder der Unbeweisbarkeit einer Aussage, spielt es also keine Rolle, ob wir ZFC oder irgendein anderes formales System untersuchen.

Gewisse Rückkopplungseffekte gibt es dennoch, auch wenn es sich dabei nicht um illegitime Zirkelschlüsse handelt wie es die Aufgabenstellung suggeriert. Angenommen, wir könnten zeigen, dass das formale System ZFC widersprüchlich ist, es also eine

Formel φ mit der Eigenschaft gibt, dass sich sowohl φ als auch $\neg\varphi$ aus den Axiomen herleiten lassen. Dann könnten wir die formale Herleitung, die auf der Ebene von ZFC nur eine Sequenz gewisser Zeichenketten ist, in eine Reihe in sich widersprüchlicher logischer Schlüsse übersetzen. Wir hätten den Mengenbegriff, wie er in der gewöhnlichen Mathematik heute in allen Disziplinen wie selbstverständlich verwendet wird, dann als inkonsistent entlarvt.

2 Mengen

Lösung zu Aufgabe 2.1

a) 1. Zermelo'sche Zahlenreihe:

$$\begin{aligned} x &= \{\{\emptyset\}\} \\ y &= \{\{\{\emptyset\}\}\} \\ (x,y) &= \{\{x\},\{x,y\}\} \\ &= \{\{\{\{\emptyset\}\}\},\{\{\{\emptyset\}\}\},\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\} \end{aligned}$$

2. Neumann'sche Zahlenreihe:

$$\begin{aligned} x &= \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \\ y &= \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} \\ (x,y) &= \{\{x\},\{x,y\}\} \\ &= \{\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\},\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}\} \end{aligned}$$

b) Das Paar $(2,2)$ hat die folgende Darstellung:

$$(2,2) = \{\{2\},\{2,2\}\} = \{\{2\}\}$$

Dies zeigt, dass eine Kuratowski-Menge auch einelementig sein kann. Die einelementigen Kuratowski-Mengen repräsentieren Paare, die an beiden Positionen das gleiche Element enthalten.

c) Beweis:

$$\begin{aligned} \bigcup\bigcap z &= \bigcup\bigcap \{\{x\},\{x,y\}\} \\ &= \bigcup \{x\} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcup\Big(\bigcup z \setminus \bigcap z\Big) &= \bigcup\Big(\bigcup \{\{x\},\{x,y\}\} \setminus \bigcap \{\{x\},\{x,y\}\}\Big) \\ &= \bigcup (\{x,y\} \setminus \{x\}) \\ &= \bigcup \{y\} \qquad \text{(wegen } x \neq y\text{)} \end{aligned}$$

$$= y$$

d) Der Fall $x = y$ lässt sich folgendermaßen erkennen:

$$x = y \;\Leftrightarrow\; \bigcup \{\{x\}, \{x, y\}\} \setminus \bigcap \{\{x\}, \{x, y\}\} = \emptyset \tag{2.1}$$

Somit lassen sich x und y aus einem beliebigen Kuratowski-Paar rekonstruieren, indem eine Fallunterscheidung vorgenommen wird. Ist die rechte Seite von (2.1) gleich $\emptyset$, so werden beide Komponenten so rekonstruiert, wie es in der vorherigen Teilaufgabe für x angegeben ist. Andernfalls wird exakt so wie in der vorherigen Teilaufgabe verfahren.

e) Eine gerne verwendete Darstellung basiert auf der Eigenschaft, dass die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl eindeutig ist. Hieraus folgt: Sind p und q zwei beliebige Primzahlen mit $p \neq q$ und x, y zwei natürliche Zahlen mit $y \neq 0$, so können wir den Bruch $\frac{x}{y}$ mit der Mengendarstellung von $p^x q^y$ repräsentieren. Negative Brüche lassen sich darstellen, indem für die Repräsentation eines negativen Vorzeichens beispielsweise eine dritte, von p und q verschiedene Primzahl r in das Produkt aufgenommen wird.

Lösung zu Aufgabe 2.2

a)

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(x) &= \emptyset \\ \mathrm{dom}(y) &= \{\emptyset\} \\ \mathrm{dom}(z) &= \{\{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}B^{\mathrm{dom}(x)} &= \emptyset \\ B^{\mathrm{dom}(y)} &= \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{1, 2\})\} \\ B^{\mathrm{dom}(z)} &= \{(\{\emptyset\}, \emptyset), (\{\emptyset\}, \{1\}), (\{\emptyset\}, \{2\}), (\{\emptyset\}, \{1, 2\})\}\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.3

a)

$$\mathrm{dom}(x) = \{\{(\emptyset, \{1\})\}\}$$

b) Eine solche Funktion hat die Gestalt

$$f = \{(\{(\emptyset, \{1\})\}, u)\} \text{ mit } u \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$$

c)

$$\begin{aligned} B^{\mathrm{dom}(x)} &= \{\ \{(\{(\emptyset,\{1\})\},u)\} \mid u \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})\ \} \\ &= \{\ \{(\{(\emptyset,\{1\})\},\emptyset)\}, \\ &\quad \{(\{(\emptyset,\{1\})\},\{1\})\} \\ &\quad \{(\{(\emptyset,\{1\})\},\{2\})\} \\ &\quad \{(\{(\emptyset,\{1\})\},\{3\})\} \\ &\quad \{(\{(\emptyset,\{1\})\},\{1,2\})\}, \\ &\quad \{(\{(\emptyset,\{1\})\},\{2,3\})\} \\ &\quad \{(\{(\emptyset,\{1\})\},\{1,3\})\} \\ &\quad \{(\{(\emptyset,\{1\})\},\{1,2,3\})\}\ \} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.4

a) Existiert eine Stufenhierarchie, so können wir nur noch die folgende Menge bilden:

$$y \ := \ \{x \mid \text{Stufe}(x) \leq n \text{ und } x \notin x\}$$

y ist dann eine Menge der Stufe $n+1$ und es entsteht nur noch ein Widerspruch für den Fall $y \in y$:

$$\begin{aligned} y \in y &\Rightarrow \text{Stufe}(y) \leq n \text{ und } y \notin y \\ &\Rightarrow \text{Widerspruch} \\ y \notin y &\Rightarrow \text{Stufe}(y) > n \text{ oder } y \in y \\ &\Rightarrow \text{Stufe}(y) > n \end{aligned}$$

b) Wird das allgemeine Komprehensionsschema durch das Separationsschema ersetzt, so können wir nur noch die folgende Menge bilden:

$$y := \{x \in z \mid x \notin x\}$$

Dann entsteht ein Widerspruch nur noch für den Fall $y \in y$:

$$\begin{aligned} y \in y &\Rightarrow y \in z \text{ und } y \notin y \\ &\Rightarrow \text{Widerspruch} \\ y \notin y &\Rightarrow y \notin z \text{ oder } y \in y \\ &\Rightarrow y \notin z \end{aligned}$$

c) Werden Mengen und Klassen unterschieden, so können wir nur noch die folgende Menge bilden:

$$y := \{x \mid x \text{ ist eine Menge und } x \notin x\}$$

Dann entsteht ein Widerspruch nur noch für den Fall $y \in y$:

$$\begin{aligned} y \in y &\Rightarrow y \text{ ist eine Menge und } y \notin y \\ &\Rightarrow \text{Widerspruch} \\ y \notin y &\Rightarrow y \text{ ist keine Menge oder } y \in y \\ &\Rightarrow y \text{ ist keine Menge} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.5

Dass wir $\{x, y\}$ und $\{y, x\}$ als gleichwertige Schreibweisen für die gleiche Menge ansehen dürfen, legitimiert das Extensionalitätsaxiom.

In Zermelos Worten besagt dieses Axiom, das damals noch *Axiom der Bestimmtheit* hieß: „*Jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.*“ [44]

Lösung zu Aufgabe 2.6

Wir finden die Antwort in §1 seiner Arbeit:

> „*Die Mengenlehre hat zu tun mit einem ‚Bereich‘ $\mathfrak{B}$ von Objekten, die wir einfach als ‚Dinge‘ bezeichnen wollen, unter denen die ‚Mengen‘ einen Teil bilden.*“
>
> Ernst Zermelo [44]

Zermelos einleitenden Worte machen deutlich, dass wir zwischen der axiomatischen Mengenlehre, wie sie von Zermelo 1908 eingeführt wurde, und der axiomatischen Mengenlehre, wie sie heute unterrichtet wird, in einem essentiellen Punkt unterscheiden müssen. In seiner Arbeit aus dem Jahr 1908 unterschied Zermelo noch strikt zwischen atomaren Bestandteilen, den sogenannten Individuen, und Mengen, die diese atomaren Bestandteile in einem hierarchischen Geflecht zusammenfassten. Die Individuen und Mengen bildeten zusammen den „*Bereich*“ und ein Objekt dieses Bereichs war dann entweder ein Individuum oder eine Menge.

Die heute unterrichteten Mengenlehren sind so aufgebaut, dass alle Elemente einer Menge ebenfalls Mengen sind. Der Basisfall in dieser Konstruktion ist die leere Menge. Sie ist die einzige, die keine Elemente enthält, und fungiert als der atomare Baustein, aus dem alle Mengen zusammengesetzt sind.

Die leere Menge teilt mit Zermelos Individuen die Eigenschaft, selbst keine Elemente zu enthalten. Für solche Entitäten hatte Zermelo den Begriff des Urelements eingeführt. Ein Urelement ist also entweder ein Individuum oder die leere Menge.

Dass wir die Individuen gar nicht benötigen, zeigt das Beispiel der Zermelo'schen oder Neumann'schen Zahlenreihe. Anstatt die natürlichen Zahlen als Individuen aufzufassen, können diese ganz einfach in Form spezieller Mengen rekonstruiert werden, was zu einer deutlichen Vereinfachung des mengentheoretischen Begriffsgerüst führt. Genau dies ist auch der Grund, warum die Individuen im Laufe der Entwicklung fallen gelassen wurden und wir es heute nahezu ausschließlich mit Mengenlehren zu tun haben, in denen die leere Menge der einzige atomare Baustein ist.

Lösung zu Aufgabe 2.7

Das Problem dieser Sichtweise wird klar, wenn wir uns den Begriff der Teilmenge im Detail ansehen. Eine Menge y heißt Teilmenge von x, wenn jedes Element von y auch ein Element von x ist. Wir dürfen mit dem Begriff der „Teilmenge einer Menge x“ also keine konkrete Menge verbinden, die a priori existiert, sondern lediglich eine Eigenschaft, die manchen Mengen zukommt und andere nicht. Das bedeutet, dass das Potenzmengenaxiom in Wirklichkeit nur eine einzige neue Mengen postuliert: die Menge $\mathcal{P}(x)$. Diese Menge enthält alle Mengen mit der Eigenschaft, eine Teilmenge von x zu sein. Alle Elemente von $\mathcal{P}(x)$ müssen bereits a priori existieren und werden nicht etwa durch das Potenzmengenaxiom erschaffen.

Wir wollen an dieser Stelle die hilfreichen Worte von Abraham Fraenkel zitieren, der diesen äußerst wichtigen Umstand einst folgendermaßen zum Ausdruck brachte:

> *„Vielmehr muss uns eine Menge erst anderweitig als existierend gegeben sein, damit sie wir sie nach Definition I* [Definition der Teilmengenrelation] *darauf prüfen können, ob sie etwa Teilmenge von m ist; erst dann können wir nach günstigem Ausfall dieser Prüfung ihres Auftretens in $\mathcal{P}(m)$ sicher sein.“*
>
> Abraham Fraenkel [15]

Lösung zu Aufgabe 2.8

a) Wir benötigen das Axiom der leeren Menge und das Paarmengenaxiom. Um z. B. die Menge $\{\{\emptyset\}\}$ zu bilden, gehen wir wie folgt vor:

$$
\begin{aligned}
x_0 &:= \emptyset && \text{(Axiom der leeren Menge)}\\
x_1 &:= \{\emptyset\} && \text{(Paarmenge } \{x_0, x_0\}\text{)}\\
x_2 &:= \{\{\emptyset\}\} && \text{(Paarmenge } \{x_1, x_1\}\text{)}
\end{aligned}
$$

b) Wir benötigen das Axiom der leeren Menge, das Paarmengenaxiom und das Vereinigungsaxiom. Um z. B. die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ zu bilden, gehen wir wie folgt vor:

$$\begin{aligned}
x_0 &:= \emptyset && \text{(Axiom der leeren Menge)}\\
x_1 &:= \{\emptyset\} && \text{(Paarmenge } \{x_0, x_0\}\text{)}\\
x_2 &:= \{\{\emptyset\}\} && \text{(Paarmenge } \{x_1, x_1\}\text{)}\\
x_3 &:= \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} && \text{(Paarmenge } \{x_1, x_2\}\text{)}\\
x_4 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} && \text{(Vereinigungsmenge } \bigcup x_3\text{)}\\
x_5 &:= \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} && \text{(Paarmenge } \{x_4, x_4\}\text{)}\\
x_6 &:= \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} && \text{(Paarmenge } \{x_4, x_5\}\text{)}\\
x_7 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} && \text{(Vereinigungsmenge } \bigcup x_6\text{)}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.9

Ist $a = \emptyset$, so ist $\mathcal{P}(a) = \{\emptyset\}$, also existiert $\{a\}$ nach dem Potenzmengenaxion. Ist $a \neq \emptyset$, dann konstruieren wir $\{a\}$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
x_0 &:= \emptyset && \text{(Axiom der leeren Menge)}\\
x_1 &:= \{a, \emptyset\} && \text{(Paarmenge } \{a, x_0\}\text{)}\\
x_2 &:= \{a\} && \text{(Aussonderungsmenge } \{u \in x_1 \mid u \neq \emptyset\}\text{)}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.10

Die Menge $\bigcap x$ ist eine Teilmenge der Vereinigungsmenge $\bigcup x$ und lässt sich aus dieser durch Separation gewinnen:

$$\bigcap x \;:=\; \{r \in \bigcup x \mid r \in u \text{ für alle } u \in x\}$$

Lösung zu Aufgabe 2.11

Wir können das Axiom der leeren Menge streichen, aber nicht ersatzlos. Im Moment ist es nämlich das einzige Axiom, das uns uns die Existenz einer Menge garantiert. Es ist ein sogenanntes *absolutes* Existenzaxiom, im Gegensatz zu den Axiomen der Paarmenge, der Vereinigung, der Potenzmenge und der Separation, die *relative* Existenzaxiome sind; mit ihnen können wir nur dann neue Mengen bilden, wenn bereits

andere Mengen vorhanden sind. Um den Mengenbildungsprozess in Gang zu bringen, benötigen wir also mindestens ein absolutes Existenzaxiom.

Das Unendlichkeitsaxiom ist ebenfalls ein absolutes Existenzaxiom. Aus der von ihm postulierten Menge können wir die leere Menge durch Separation erzeugen, indem wir alle Elemente u mit $u \neq u$ entnehmen. Das bedeutet: Ist sowohl das Unendlichkeitsaxiom als auch das Separationsschema vorhanden, so benötigen wir das Axiom der leeren Menge nicht.

Lösung zu Aufgabe 2.12

a) Vorbemerkung: Wir schreiben $\mathrm{Ind}(x)$, um auszudrücken, dass x eine induktive Menge ist, also die Beziehungen (2.9) und (2.10) erfüllt.

Gilt $\mathrm{Ind}(x)$, ist x also eine induktive Menge, so sind alle Elemente der Neumann'schen Zahlenreihe darin enthalten. Existiert in x noch ein anderes Element $u \in x$, so ist die Menge $x \setminus \{u\}$ immer noch eine induktive Menge. Ferner ist $x \setminus \{u\}$ eine Teilmenge von x und damit ein Element der Potenzmenge $\mathcal{P}(x)$.

Es sei ω_0 die induktive Menge, die das Unendlichkeitsaxiom postuliert. Dann lässt sich die Menge ω folgendermaßen konstruieren:

$$\omega = \bigcap \{y \in \mathcal{P}(\omega_0) \mid \mathrm{Ind}(y)\}$$

Dass auf der rechten Seite tatsächlich die Menge ω konstruiert wird, lässt sich folgendermaßen einsehen. Zum einen ist diese Menge selbst eine induktive Menge, sodass alle Elemente der Neumann'schen Zahlenreihe in ihr enthalten sind. Zum anderen kann kein weiteres Element darin enthalten sein. Nach der Vorbemerkung hat jede induktive Menge, die ein solches Element u enthält, eine induktive Teilmenge, die u nicht enthält, und das bedeutet, dass u durch die Operation ‚$\cap$' weggeschnitten wird. Es bleiben also genau die Elemente der Neumann'schen Zahlenreihe übrig.

b) Neben dem Unendlichkeitsaxiom wurde das Potenzmengenaxiom und das Aussonderungsaxiom verwendet sowie die Axiome, die für die Bildung der Schnittmenge benötigt werden. Diese sind nach Aufgabe 2.10 das Vereinigungsaxiom und das Aussonderungsaxiom.

c) Ja. Wir verfolgen den Ansatz aus [12] und nehmen erneut an, ω_0 sei die induktive Menge, die das Unendlichkeitsaxiom postuliert. Aus dieser Menge können wir ω direkt aussondern, indem wir für $\varphi(y)$ die folgende Formel wählen:

$$\varphi(y) := \forall\, w\ (\mathrm{Ind}(w) \to y \in w)$$

φ ist im Vorgriff auf Kapitel 3 bereits in der formalen Sprache von ZFC formuliert und trifft auf genau jene Mengen y zu, die Elemente aller induktiven Mengen sind.

Nach der Vorbemerkung sind dies aber genau die Elemente der Neumann'schen Zahlenreihe. Damit gilt:

$$\omega = \{y \in \omega_0 \mid \forall\, w\ (\mathrm{Ind}(w) \to y \in w)\}$$

Lösung zu Aufgabe 2.13

Die Antwort hängt davon ab, welche Axiome wir für die Lösung dieser Aufgabe zulassen. Mit den Axiomen I bis VII ist die Herleitung nicht möglich. Es ist ein bekanntes Ergebnis der Mengenlehre, dass hierfür das Ersetzungsschema benötigt wird (siehe z. B. [10]).

Lösung zu Aufgabe 2.14

Das Unendlichkeitsaxiom besagt, dass eine induktive Menge existiert. Nach den beiden in dieser Aufgabe aufgestellten Forderungen enthält eine solche Menge y die leere Menge, und jedes Element von y ist in einem anderen Element von y enthalten.

Dass die Menge y unendlich viele Elemente enthält, ist damit zunächst noch nicht gewährleistet. Es könnte nämlich sein, dass die Elemente in y eine Ringinklusion bilden, die Elemente also beispielsweise so miteinander in Beziehung stehen:

$$u \in v \in w \in u$$

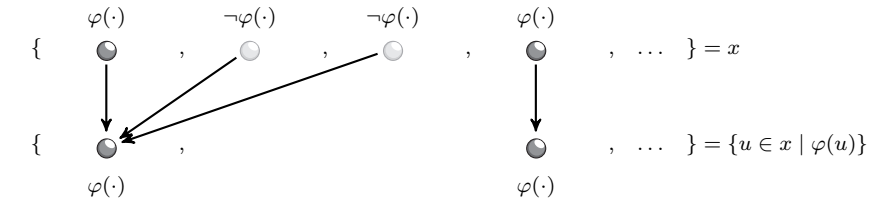
Momentan haben wir noch kein Axiom, das dies explizit untersagt. Dies wird sich erst mit der Einführung des Fundierungsaxioms ändert. Unter anderem stellt dieses Axiom sicher, dass keine Ringinklusionsketten auftreten können. Zusammen mit dem Fundierungsaxiom stellt das Axiom dann tatsächlich sicher, dass eine unendliche Menge existiert.

Lösung zu Aufgabe 2.15

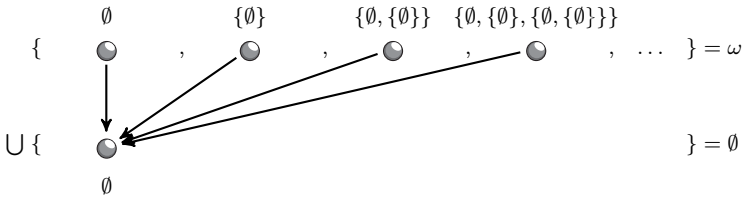
a) Ist x eine Menge und φ ein Prädikat, das auf mindestens ein Element $u \in x$ zutrifft, so können wir die Separationsmenge mit einer Ersetzungsfunktion f gewinnen, die alle Elemente aus x, auf die φ zutrifft, auf sich selbst abbildet und alle Elemente, auf die φ nicht zutrifft, auf u. Dieses Vorgehen funktioniert allerdings nicht für den Fall, dass die Separationsmenge leer ist. Die leere Menge lässt sich aber mithilfe des Ersetzungs- und des Vereinigungsaxioms aus jeder Menge erzeugen, die die leere Menge als Element enthält. Die Existenz einer solchen Menge garantiert uns das Unendlichkeitsaxiom.

   Wir fassen beide Fälle bildlich zusammen:

- 1. Fall: Es gibt ein $u \in x$ mit der Eigenschaft φ



- 2. Fall: Es gibt kein $u \in x$ mit der Eigenschaft φ



b) Um die leere Menge zu erzeugen, haben wir neben dem Ersetzungsschema das Vereinigungsaxioms und das Unendlichkeitsaxiom verwendet.

Lösung zu Aufgabe 2.16

Auf den ersten Blick lautet die Antwort Ja. Aus dem Unendlichkeitsaxiom folgt die Existenz von ω, sodass wir die besagte Menge augenscheinlich durch die Ersetzung von $n \in \omega$ durch x_n erzeugen können. An dieser Stelle stehen wir jedoch vor dem Problem, dass die Vorschrift, nach der die Ersetzung erfolgen soll, beschreibbar sein muss. Bezogen auf das formale System ZFC, das wir später einführen, bedeutet dies, dass eine Formel φ in der formalen Sprache von ZFC existiert, die diese Ersetzung beschreibt. Dies führt auf dem direkten Weg in die Theorie der rekursiv beschreibbaren Funktionen über ω, die wir in diesem Buch aber nicht behandeln werden.

Daher beschränken wir uns auf die folgende informelle Antwort: Wenn $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Mengen sind und wir einen beschreibbaren Zugriff auf diese Mengen haben, so existiert auch die Zusammenfassung, ansonsten können wir die Existenz nicht garantieren.

Lösung zu Aufgabe 2.17

Sind $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ Mengen, dann sind es nach dem Paarmengenaxiom auch

$$\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}.$$

Daraus können wir die Vereinigungsmenge

$$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

bilden. Aus (2.129) würde folgen, dass in dieser Menge kein minimales Element vorhanden ist, im Widerspruch zum Axiom der Fundierung.

Lösung zu Aufgabe 2.18

a)

$$\begin{aligned} x &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &\overset{(2.6)}{\Rightarrow} \bigcup x = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ &\Rightarrow \bigcup x \in x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &\overset{(2.6)}{\Rightarrow} \bigcup x = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ &\Rightarrow \bigcup x \subset x \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x &:= \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\} \\ &\overset{(2.6)}{\Rightarrow} \bigcup x = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\} \\ &\Rightarrow x \subset \bigcup x \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\} \ldots\} \\ &\overset{(2.6)}{\Rightarrow} \bigcup x = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\} \ldots\} \\ &\Rightarrow \bigcup x = x \end{aligned}$$

e)

$$x \in x \Rightarrow \ldots \in x \in x \in x \in x \in x,$$

im Widerspruch zum Axiom der Fundierung.

f)

$$x \in \bigcup x \overset{(2.6)}{\Rightarrow} x \in u \text{ für ein } u \in x$$
$$\Rightarrow \ldots \in x \in u \in x \in u \in x,$$
im Widerspruch zum Axiom der Fundierung.

g) Wäre gleichzeitig $y \in x$ und $x \subseteq y$, dann hätten wir $y \in y$, im Widerspruch zu e).

Lösung zu Aufgabe 2.19

Sei x eine Menge. Wir nehmen das Auswahlaxiom in seiner ursprünglichen Formulierung an und zeigen, dass zu x eine Auswahlfunktion existiert. Ist $x = \emptyset$ oder $x = \{\emptyset\}$, dann ist $\emptyset$ bzw. $\{(\emptyset, \emptyset)\}$ eine Auswahlfunktion. Andernfalls definieren wir die folgende Menge:

$$y := \{\{u\} \times u \mid u \in x \setminus \{\emptyset\}\}$$

Diese Menge können wir auch so aufschreiben:

$$y = \{\{(u, v) \mid v \in u\} \mid u \in x \setminus \{\emptyset\}\}$$

y ist ein Mengensystem nichtleerer, paarweise disjunkter Mengen. Somit folgt aus dem Auwahlaxiom die Existenz einer Auswahlmenge f. Diese Menge ist eine Auswahlfunktion für die Menge $x \setminus \{\emptyset\}$. Ist $\emptyset \notin x$, so ist f auch eine Auswahlfunktion für x, ansonsten ist $f \cup \{(\emptyset, \emptyset)\}$ eine solche Auswahlfunktion.

Für die andere Richtung nehmen wir an, x sei ein Mengensystem nichtleerer, paarweise disjunkter Mengen. Nach Voraussetzung existiert eine Auswahlfunktion f mit $\mathrm{dom}(f) = x$. Dann ist $\mathrm{ran}(f)$ eine Auswahlmenge von x.

Lösung zu Aufgabe 2.20

Wir zeigen zunächst die Beziehung $x \subseteq \mathcal{P}(\bigcup x)$:

$$u \in x \Rightarrow \ u \subseteq \bigcup x \Rightarrow \ u \in \mathcal{P}(\bigcup x)$$

Die Richtung von 1. nach 2. ist trivial.

Die Richtung von 2. nach 1. ergibt sich folgendermaßen: Sei x eine Menge. Nach Voraussetzung existiert für die Menge $\mathcal{P}(\bigcup x)$ eine Auswahlfunktion f. Wegen $\mathcal{P}(\bigcup x) \supseteq x$ ist $\mathrm{dom}(f) \supseteq x$. Schränken wir den Definitionsbereich von f auf die Menge x ein, so erhalten wir eine Auswahlfunktion für x.

Lösung zu Aufgabe 2.21

a) Die Elemente der Neumann'schen Zahlenreihe sind allesamt transitiv. In der Zermelo'schen Zahlenreihe sind nur $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$ transitiv.

b) Die Neumann'sche Zahlenreihe hat die Eigenschaft, dass die Zusammenfassung der ersten n Elemente (also das n-elementige Anfangssegment) dem Element an der Positon $n+1$ entspricht. Da alle Elemente der Neumann'schen Zahlenreihe transitiv sind, sind es somit auch alle Anfangssegmente. Die Anfangssegmente der Zermelo'schen Zahlenreihe sind ebenfalls transitiv.

c) Wir wissen, dass alle Elemente der Neumann'schen Zahlenreihe transitiv sind. Da jedes Element der Neumann'schen Zahlenreihe der Menge seiner Vorgänger entspricht, ist jedes Element der Reihe eine transitive Menge, deren Elemente selbst transitiv sind. Mengen mit dieser Eigenschaft werden wir später Ordinalzahlen nennen.

   Für die Elemente der Zermelo'schen Reihe gilt folgendes: Die ersten beiden Elemente (die Mengen $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$) sind transitive Mengen, deren Elemente selbst transitiv sind. Alle anderen Elemente sind nicht transitiv und damit erst recht keine transitiven Mengen, deren Elemente selbst transitiv sind.

Lösung zu Aufgabe 2.22

Ist $x = \emptyset$, so ist (2.132) erfüllt. Ist $x \neq \emptyset$, so kann (2.132) nur gelten, wenn $\emptyset$ ein Element von x ist. Das bedeutet, dass wir x in der Form $x = \{\emptyset\} \cup y$ darstellen können mit $y \subset x$. Dann gilt für y:

$$\begin{aligned} y \subset x \ &\overset{(2.132)}{\Rightarrow} y \in x \\ &\Rightarrow y \in \{\emptyset\} \cup y \\ &\Rightarrow y = \emptyset \text{ oder } y \in y \\ &\Rightarrow y = \emptyset \end{aligned}$$

Also ist $x = \{\emptyset\}$ der einzige verbleibende Kandidat. Diese Menge erfüllt (2.132) tatsächlich, sodass es zwei Lösungen gibt: $x = \emptyset$ und $x = \{\emptyset\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.23

a)

$$\begin{aligned} x_1 = \{\{\{\emptyset\}\}\} \ &\overset{(2.20)}{\Rightarrow} y_0 = \{\{\{\emptyset\}\}\} \\ &\overset{(2.21)}{\Rightarrow} y_1 = \bigcup y_0 = \{\{\emptyset\}\} \\ &\overset{(2.21)}{\Rightarrow} y_2 = \bigcup y_1 = \{\emptyset\} \end{aligned}$$

$$\overset{(2.21)}{\Rightarrow} y_n = \emptyset \text{ für alle } n \geq 3$$
$$\overset{(2.19)}{\Rightarrow} y = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$$

$x_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
$$\overset{(2.20)}{\Rightarrow} y_0 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$
$$\overset{(2.21)}{\Rightarrow} y_1 = \bigcup y_0 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$\overset{(2.21)}{\Rightarrow} y_2 = \bigcup y_1 = \{\emptyset\}$$
$$\overset{(2.21)}{\Rightarrow} y_n = \emptyset \text{ für alle } n \geq 3$$
$$\overset{(2.19)}{\Rightarrow} y = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

b) Die Menge y_0 existiert per Voraussetzung, und die Existenz der Mengen y_{n+1} wird durch das Vereinigungsmengenaxiom garantiert. Aus der Existenz der Menge ω folgt mit dem Ersetzungsschema, dass die Menge $\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$ existiert und deren Vereinigungsmenge ist die Menge y.

c) Das Fundierungsaxiom sorgt dafür, dass die Mengen y_m ab einem Index $m \in \mathbb{N}$ gleich der leeren Menge sein müssen. Ansonsten könnten wir aus der Folge der y_n eine unendlich absteigende $\in$-Kette erzeugen. Für die ermittelte natürliche Zahl m gilt dann:
$$\bigcup \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup \{y_n \mid n < m\}$$

d) Wir erhalten die Menge y ganz einfach als die transitive Hülle von $\{x\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.24

a) Die angegeben Relation erfüllen die folgenden Eigenschaften:

1. r_1 ist reflexiv und transitiv.
2. r_2 ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.
3. r_3 ist irreflexiv, asymmetrisch und transitiv.

Somit gilt:

1. r_1 ist eine Quasiordnung.
2. r_2 ist eine Halbordnung und damit erst recht eine Quasiordnung.
3. r_3 ist keine Quasiordnung.

b) Wir ordnen die Punkte der Menge $\mathbb{R}^2$ anhand ihres euklidischen Abstands zum Ursprung an:
$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \;:\Leftrightarrow\; \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leq \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \tag{2.2}$$

Die definierte Relation ist reflexiv und transitiv und somit eine Quasiordnung. Sie ist aber nicht antisymmetrisch, da z. B. gleichzeitig $(0,1) \leq (1,0)$ und $(1,0) \leq (0,1)$ gilt.

c) Die Relation ‚$\sim$' ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

1. Reflexivität

$$\begin{aligned} u \leq u &\Rightarrow u \leq u \text{ und } u \leq u \\ &\Rightarrow u \sim u \end{aligned}$$

2. Symmetrie

$$\begin{aligned} u \sim v &\Rightarrow u \leq v \text{ und } v \leq u \\ &\Rightarrow v \leq u \text{ und } u \leq v \\ &\Rightarrow v \sim u \end{aligned}$$

3. Transitivität

$$\begin{aligned} u \sim v \text{ und } v \sim w &\Rightarrow u \leq v \text{ und } v \leq u \text{ und } v \leq w \text{ und } w \leq v \\ &\Rightarrow (u \leq v \text{ und } v \leq w) \text{ und } (w \leq v \text{ und } v \leq u) \\ &\Rightarrow (u \leq w) \text{ und } (w \leq u) \\ &\Rightarrow u \sim w \end{aligned}$$

d) Die Äquivalenzklassen sind die konzentrischen Kreise um den Ursprung.

e) Ja. Wir fordern dann die folgenden beiden Bedingungen:

Irreflexivität: $u \not< u$

Transitivität: Aus $u < v$ und $v < w$ folgt $u < w$

Ein Beispiel für eine strikte Quasi-Ordnung erhalten wir, indem wir das Beispiel aus Teil b) geringfügig anpassen:

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \;:\Leftrightarrow\; \sqrt{x_1^2 + y_1^2} < \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Ein anderes Beispiel einer Quasiordnung ist die Relation r_3 aus Teil a). r_3 ist eine strikte Halbordnung und damit erst recht eine strikte Quasiordnung.

Lösung zu Aufgabe 2.25

a) 1. Jede asymmetrische Relation ist auch antisymmetrisch.

Richtig. Ist eine Relation R asymmetrisch, so kann niemals gleichzeitig uRv und vRu gelten. Die Prämisse der Antisymmetrieforderung ist somit immer falsch und die Forderung daher immer erfüllt.

2. Jede antisymmetrische Relation ist auch asymmetrisch

   Falsch. Die Relation $\{(\emptyset, \emptyset)\}$ ist antisymmetrisch, aber nicht asymmetrisch.

3. Jede irreflexive, antisymmetrische Relation ist auch asymmetrisch.

   Richtig.

$$\begin{aligned} u\,R\,v \text{ und } v\,R\,u &\Rightarrow u\,R\,v \text{ und } u = v, \text{ aufgrund der Antisymmetrie} \\ &\Rightarrow u\,R\,u, \text{ im Widerspruch zur Irreflexivität} \end{aligned}$$

   Somit gilt $u \not R\, v$ oder $v \not R\, u$, also die Asymmetrie.

   Insgesamt erhalten wir den folgenden Zusammenhang:

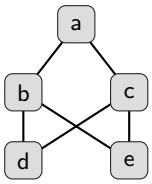
$$R \text{ ist asymmetrisch} \Leftrightarrow R \text{ ist irreflexiv und antisymmetrisch}$$

   Die Asymmetrie fasst als die Antisymmetrie und die Irreflexivität zu einer Einzelforderung zusammen.

b) Es passiert nichts, solange wir die Forderung der Irreflexivität in der Definition belassen. Im Kapiteltext haben wir darauf hingewiesen, dass wir diese Forderung streichen können, da sie auf der Antisymmetrie folgt. Ohne die Forderung der Irreflexivität hat die Ersetzung der Asymmetrie durch die Antisymmetrie jedoch gravierende Folgen. Strikte Ordnungen würden sich dann von Ordnungen nur dadurch unterscheiden, dass die Forderung der Reflexivität gestrichen wird. Insbesondere wäre dann jede Ordnung auch eine strikte Ordnung, was wir auf keinen Fall haben möchten.

Lösung zu Aufgabe 2.26

a) Die Halbordnung hat die folgende Hasse-Diagramm-Darstellung:



b)

	maximal in y	minimal in y	am größten in y	am kleinsten in y	obere Schranke von y	untere Schranke von y	Supremum von y	Infimum von y
$y = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e}\}$	a	d, e	a	–	a	–	a	–
$y = \{\mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e}\}$	b, c	d, e	–	–	a	–	a	–
$y = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{d}\}$	a	d	a	d	a	d	a	d
$y = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$	a	b, c	a	–	a	d, e	a	–
$y = \{\mathsf{b}, \mathsf{c}\}$	b, c	b, c	–	–	a	d, e	a	–
$y = \{\mathsf{d}, \mathsf{e}\}$	d, e	d, e	–	–	a,b,c	–	–	–
$y = \{\mathsf{b}\}$	b	b	b	b	b	b	b	b

Lösung zu Aufgabe 2.27

a) Ist $x = \emptyset$, so gibt es keine obere Schranke. Ist $x \neq 0$, so ist jedes Element von x eine obere Schranke von y.

b) Ist $x = \emptyset$, so gibt es keine untere Schranke. Ist $x \neq 0$, so ist jedes Element von x eine untere Schranke von y.

Lösung zu Aufgabe 2.28

Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, bedienen wir uns schon in dieser Aufgabe den Symbolen der Prädikatenlogik:

$$
\begin{aligned}
& x \text{ besitzt ein } \in\text{-minimales Element} \\
\Leftrightarrow\ & \exists\,(u \in x)\ \neg\exists\,(v \in x)\ v \in u \\
\Leftrightarrow\ & \exists\,(u \in x)\ \neg\exists\, v\ (v \in x \wedge v \in u) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\,(u \in x)\ x \cap u = \emptyset \\
\Leftrightarrow\ & \text{Es gibt ein } u \in x \text{ mit } x \cap u = \emptyset
\end{aligned}
$$

Ferner ist:

$$
\begin{aligned}
& \exists\,(u \in x)\ \neg\exists\,(v \in x)\ v \in u \\
\Leftrightarrow\ & \exists\,(u \in x)\ \neg\exists\,(v \in u)\ v \in x
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$ Es gibt ein $u \in x$ und kein Element von u ist in x

Die vorletzte Aussage ist äquivalent zu dieser:

$$\exists\,(u \in x)\ \forall\,(v \in u)\ v \notin x,$$

Diese Form der Formulierung werden wir später verwenden, um das Fundierungsaxiom in der Sprache von ZFC formal niederzuschreiben.

Lösung zu Aufgabe 2.29

1. Richtung von links nach rechts.

   Ist $(x, <)$ eine strikte lineare Ordnung, so ist ‚$<$' transitiv. Es bleibt, die Trichotomie zu zeigen. Dass mindestens eine der Bedingungen $u < v$, $u = v$ und $u > v$ erfüllt ist, folgt aus der Linearität. Wir zeigen durch Widerspruch, dass niemals zwei dieser Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein können.

   - Aus $u < v$ und $u = v$ folgt $u < u$, im Widerspruch zur Irreflexivität.
   - Aus $v < u$ und $u = v$ folgt $v < v$, im Widerspruch zur Irreflexivität.
   - $u < v$ und $v < u$ widerspricht der Asymmetrie.

2. Richtung von rechts nach links.

   Wir müssen zeigen, dass ‚$<$' irreflexiv und asymmetrisch ist. Die Asymmetrie ist eine direkte Folge der Trichotomie. Wäre ‚$<$' reflexiv, so würde gleichzeitig $u < u$ und $u = u$ gelten, was der Trichotomie widerspricht.

Lösung zu Aufgabe 2.30

In den folgenden Lösungen stehen ‚$\leq$' und ‚$<$' für die gewöhnliche Ordnung auf den jeweils angegebenen Zahlenmengen.

a) 1. Wir betrachten die lineare Ordnung $(\mathbb{N}, \leq)$
   Jedes Anfangssegment $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ wird durch die Zahl n generiert.
   Allerdings ist es unmöglich, das leere Segment $\emptyset$ zu generieren. Die Aufgabe ist also nur lösbar, wenn wir das leere Segment in unserer Betrachtung ausklammern.

   2. Wir betrachten die lineare Ordnung $(\mathbb{Q}, \leq)$
   Kein Segment der Form $(-\infty; x)$ wird von einem Element generiert.

   3. Die einzige Lösung ist die lineare Ordnung $(\emptyset, \emptyset)$
   Andere Lösungen gibt es nicht. Sobald x ein Element enthält, gibt es auch ein generiertes Anfangssegment.

b) 1. Wir betrachten die strikte lineare Ordnung $(\mathbb{N}, <)$

   Das leere Anfangssegment wird durch die Zahl 0 generiert und das Anfangssegment $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ durch die Zahl $n + 1$.

   2. Wir betrachten die strikte lineare Ordnung $(\mathbb{Q}, <)$

   Kein Segment der Form $(-\infty; x]$ wird von einem Element generiert.

   3. Auch hier ist die einzige Lösung die lineare Ordnung $(\emptyset, \emptyset)$

c) Durch die Forderung, dass jede nichtleere Teilmenge von x ein größtes Element enthält. In diesem Fall wird jedes nichtleere Anfangssegment y durch das größte darin enthaltene Element generiert. Auf die Forderung, dass y nichtleer ist, kann nicht verzichtet werden, da die leere Menge kein maximales Element enthält.

d) Durch die Forderung, dass jede nichtleere Teilmenge von x ein kleinstes Element enthält. In diesem Fall wird jedes echte Anfangssegment y durch das kleinste Element der Menge $x \setminus y$ generiert. Auf die Forderung, dass y ein echtes Anfangssegment ist, kann nicht verzichtet werden, da die Menge $x \setminus y$ für das unechte Anfangssegment $y = x$ zur leeren Menge wird.

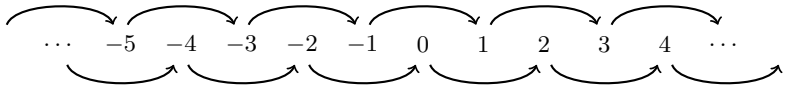
   Eine strikte lineare Ordnung, die diese zusätzliche Forderung erfüllen, wird als Wohlordnung bezeichnet (siehe Abschnitt 2.3.3).

Lösung zu Aufgabe 2.31

a) Das Tupel $(\mathbb{N}, E)$ mit $E = \emptyset$ ist eine strikte Halbordnung, die nicht extensional ist. Um die Extensionalität zu widerlegen, wählen wir zwei beliebige voneinander verschiedene Zahlen, z. B. die Zahlen 1 und 2. Dann gilt:

$$1 \neq 2, \text{ aber } \{s \mid s\, E\, 1\} = \{s \mid s\, E\, 2\} = \emptyset$$

b) Wir betrachten die folgende Anordnung der ganzen Zahlen, in der zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \neq y$ nur dann in der gewöhnlichen Ordnungsbeziehung zueinander stehen, wenn sie beide gerade oder beide ungerade sind:



   Die definierte Ordnungsrelation ist nicht linear. Trotzdem ist sie extensional, da jedes Element eindeutig durch die Menge seiner Vorgänger bestimmt ist.

Lösung zu Aufgabe 2.32

a) 1. Relation E_1:

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \emptyset\\ \pi(2) &= \{\emptyset\}\\ \pi(3) &= \{\emptyset\}\\ \pi(4) &= \{\emptyset\}\\ \pi(5) &= \{\{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

Fazit: Der Mostowski-Kollaps ist die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

2. Relation E_2:

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \emptyset\\ \pi(2) &= \{\emptyset\}\\ \pi(3) &= \{\emptyset\}\\ \pi(4) &= \{\emptyset\}\\ \pi(5) &= \{\{\emptyset\}\}\\ \pi(6) &= \{\{\emptyset\}\}\\ \pi(7) &= \{\{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

Fazit: Der Mostowski-Kollaps ist die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

3. Relation E_3:

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \emptyset\\ \pi(2) &= \{\emptyset\}\\ \pi(3) &= \{\emptyset\}\\ \pi(4) &= \{\emptyset\}\\ \pi(5) &= \{\{\emptyset\}\}\\ \pi(6) &= \{\{\emptyset\}\}\\ \pi(7) &= \{\{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

Fazit: Der Mostowski-Kollaps ist die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

4. Relation E_4:

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \emptyset\\ \pi(2) &= \{\emptyset\}\\ \pi(3) &= \{\emptyset\}\\ \pi(4) &= \{\{\emptyset\}\}\\ \pi(5) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\\ \pi(6) &= \{\{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

Fazit: Der Mostowski-Kollaps ist die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

b) 1. Relation E_1 (transitive Hülle):

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \emptyset\\ \pi(2) &= \{\emptyset\}\\ \pi(3) &= \{\emptyset\}\\ \pi(4) &= \{\emptyset\}\\ \pi(5) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

Fazit: Der Mostowski-Kollaps ist die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

2. Relation E_2 (transitive Hülle):

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \emptyset\\ \pi(2) &= \{\emptyset\}\\ \pi(3) &= \{\emptyset\}\\ \pi(4) &= \{\emptyset\}\\ \pi(5) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\\ \pi(6) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\\ \pi(7) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

Fazit: Der Mostowski-Kollaps ist die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

3. Relation E_3 (transitive Hülle):

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \emptyset\\ \pi(2) &= \{\emptyset\}\\ \pi(3) &= \{\emptyset\}\\ \pi(4) &= \{\emptyset\}\\ \pi(5) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\\ \pi(6) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\\ \pi(7) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

Fazit: Der Mostowski-Kollaps ist die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

4. Relation E_4 (transitive Hülle):

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \emptyset\\ \pi(2) &= \{\emptyset\}\\ \pi(3) &= \{\emptyset\}\\ \pi(4) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\\ \pi(5) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

$$\pi(6) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Fazit: Der Mostowski-Kollaps ist die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

c) Nein. Beispielsweise haben die Knoten 2 und 3 in allen Graphen die gleiche Vorgängermenge (die Menge $\{1\}$).

Lösung zu Aufgabe 2.33

a)

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \emptyset\\ \pi(2) &= \{\pi(1)\} = \{\emptyset\}\\ \pi(3) &= \{\pi(2)\} = \{\{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

b) Nein, eine transitive Menge ist etwas anderes als eine transitive Relation. Die Aussage des Isomorphiesatzes von Mostowski ist nicht, dass ‚$\in$' eine transitive Relation auf der Menge $\{\pi(1), \pi(2), \pi(3)\}$ ist (was sie nicht ist), sondern dass $\{\pi(1), \pi(2), \pi(3)\}$ eine transitive Menge ist. Zur Erinnerung: Eine Menge x heißt transitiv, wenn aus $u \in v \in x$ die Beziehung $u \in x$ folgt, und genau dies ist hier der Fall.

Lösung zu Aufgabe 2.34

a) Für jede Primzahl p gilt $p\,E\,p$. Damit verletzt E die Voraussetzung, eine fundierte Relation zu sein, sodass wir den Mostowski-Kollaps nicht berechnen können.

b) Der Mostowski-Kollaps ist die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Dies folgt aus:

$$\pi(n) = \begin{cases}\emptyset & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist.}\\ \{\emptyset\} & \text{falls } n \text{ keine Primzahl ist.}\end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 2.35

a) Die Zermelo'sche Zahlenreihe ist die Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots$ mit

$$\begin{aligned}0 &:= \emptyset\\ 1 &:= \{\emptyset\}\\ 2 &:= \{\{\emptyset\}\}\end{aligned}$$

$$3 := \{\{\{\emptyset\}\}\}$$
$$\dots$$

In der Mengendarstellung von n ist die Mengendarstellung von $n-1$ das einzige Element. Somit ist

$$\pi(0) = \emptyset$$
$$\pi(n) = \{\pi(n-1)\}$$

und wir erhalten als Mostowski-Kollaps die Zermelo'sche Zahlenreihe zurück.

b) Die Neumann'sche Zahlenreihe ist die Reihe $0, 1, 2, 3, \dots$ mit

$$0 := \emptyset$$
$$1 := \{\emptyset\}$$
$$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$
$$\dots$$

In der Mengendarstellung von n sind die Mengendarstellungen aller Zahlen kleiner als n enthalten. Also ist

$$\pi(0) = \emptyset$$
$$\pi(n) = \{\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(n-1)\}$$

und wir erhalten als Mostowski-Kollaps die Neumann'sche Zahlenreihe zurück.

Lösung zu Aufgabe 2.36

a) Es sei $v \in x$. Wir zeigen die Behauptung $\pi(v) = v$ durch $\in$-Induktion. Als Induktionshypothese sei

$$\pi(u) = u \quad \text{für alle } u \in v \tag{2.3}$$

1. Wir zeigen: $v \subseteq \pi(v)$

$$u \in v \ \overset{(2.134)}{\Rightarrow} \pi(u) \in \pi(v) \ \overset{(2.3)}{\Rightarrow} \ u \in \pi(v)$$

2. Wir zeigen: $\pi(v) \subseteq v$

   Sei $u \in \pi(v)$. Aus $\pi(v) \in y$ und der Transitivität von y folgt $u \in y$. Da π surjektiv ist, muss es ein $w \in x$ mit

$$\pi(w) = u \tag{2.4}$$

geben. Damit können wir schließen:

$$\begin{aligned} u \in \pi(v) &\overset{(2.4)}{\Rightarrow} \pi(w) \in \pi(v) \\ &\overset{(2.134)}{\Rightarrow} w \in v \\ &\overset{(2.3)}{\Rightarrow} \pi(w) \in v \\ &\overset{(2.4)}{\Rightarrow} u \in v \end{aligned}$$

Aus $v \subseteq \pi(v)$ und $\pi(v) \subseteq v$ folgt $v = \pi(v)$, was zu beweisen war.

b) Aus der Surjektivität von π folgt:

$$y = \{\pi(u) \mid u \in x\} \overset{a)}{=} \{u \mid u \in x\} = x$$

Lösung zu Aufgabe 2.37

Es sei y eine zweite transitive, durch ‚$\in$' geordnete Menge, die über einen Ordnungsisomorphismus π' mit x verbunden ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\pi \text{ ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen } x \text{ und } \pi(x). \\ &\pi' \text{ ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen } x \text{ und } y. \end{aligned}$$

Dann ist die Abbildung $\pi' \circ \pi^{-1}$ ein $\in$-Isomorphismus zwischen $\pi(x)$ und y. Hieraus folgt $\pi(x) = y$ mit dem in Übungsaufgabe 2.36 bewiesenen Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 2.38

Auf Seite 82 haben wir erarbeitet, dass jede Menge x von Ordinalzahlen durch ‚$\in$' wohlgeordnet wird. Satz 2.29 verbietet uns, die Menge x mit der Klasse Ord gleichzusetzen, da dann weder x noch die induzierte Ordnung Mengen wären. Mit dem Begriffsgerüst, das wir in diesem Buch entwickelt haben, ist diese Bezeichnung also zunächst nicht legitim.

Nichtsdestotrotz wäre es problemlos möglich, den Begriff der Ordnung allgemeiner zu fassen und auf Klassen zu definieren. Genau dies wird z. B. in der NBG-Mengenlehren getan, in der der Klassenbegriff fest verankert ist. Eine Wohlordnung einer echten Klasse ist dann ebenfalls eine echte Klasse und die Klasse Ord durch ‚$\in$' wohlgeordnet.

Lösung zu Aufgabe 2.39

a) Ord ist keine Menge, sodass wir das Separationsschema nicht anwenden dürfen.

b) Die korrekte Argumentation verläuft so: Existiert mindesten eine Ordinalzahl mit der Eigenschaft φ und ist β eine solche Zahl, dann existiert die Menge

$$\beta^{\leq} := \{\alpha \mid \alpha \leq \beta\} \tag{2.5}$$

Daraus können wir die Menge

$$\{\alpha \in \beta^{\leq} \mid \varphi(\alpha)\}$$

bilden und aus der Eigenschaft der Ordinalzahlen, durch ‚$\in$' wohlgeordnet zu sein, schließen, dass diese Menge ein $\in$-minimales Element enthält.

Die Idee besteht also darin, das minimale Element nicht in der Klasse aller Ordinalzahlen zu suchen, die φ erfüllen, sondern in einer nichtleeren Teilmenge davon, die nach unten abgeschlossen ist.

Es bleibt die Frage zu klären, wie sich die Menge (2.5) bilden lässt. Dies stellt sich als simpel heraus, da $\beta^{\leq}$ nichts anderes ist als die Menge $\beta \cup \{\beta\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.40

1. (2.135) ist falsch.

   Für

   $$x := \{\emptyset\}$$
   $$y := \{\{\emptyset\}\}$$

   gilt:

   $$\mathrm{s}(x) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
   $$\mathrm{s}(y) = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

   Wir haben $x \in y$, aber $\mathrm{s}(x) \notin \mathrm{s}(y)$.

2. (2.136) ist wahr.

   Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition der Gleichheit.

3. (2.137) ist falsch.

   Für

   $$x := \emptyset$$
   $$y := \{\{\emptyset\}\}$$

   gilt:

   $$\mathrm{s}(x) = \{\emptyset\}$$

$$s(y) = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

Wir haben $s(x) \in s(y)$, aber $x \notin y$

4. (2.138) ist wahr.
   Wir beweisen die Behauptung durch Widerspruch und nehmen an:

$$s(x) = s(y) \tag{2.6}$$
$$x \neq y \tag{2.7}$$

   Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in x \cup \{x\} &\Rightarrow x \in s(x) \\ &\overset{(2.6)}{\Rightarrow} x \in s(y) \\ &\Rightarrow x \in y \cup \{y\} \\ &\Rightarrow x \in y \text{ oder } x = y \\ &\overset{(2.7)}{\Rightarrow} x \in y \end{aligned}$$

   Es gilt aber auch:

$$\begin{aligned} y \in y \cup \{y\} &\Rightarrow y \in s(y) \\ &\overset{(2.6)}{\Rightarrow} y \in s(x) \\ &\Rightarrow y \in x \cup \{x\} \\ &\Rightarrow y \in x \text{ oder } y = x \\ &\overset{(2.7)}{\Rightarrow} y \in x \end{aligned}$$

   Somit gilt gleichzeitig $x \in y$ und $y \in x$, im Widerspruch zum Axiom der Fundierung.

Lösung zu Aufgabe 2.41

Die Behauptung lässt sich mit einem einfachen Widerspruchsargument belegen.

$$\begin{aligned} \gamma = s(\alpha) \text{ für ein } \alpha \in \mathrm{Ord} &\overset{(2.70)}{\Rightarrow} \alpha \in \gamma \\ &\overset{(2.73)}{\Rightarrow} s(\alpha) \in \gamma \\ &\Rightarrow \gamma \in \gamma, \text{ im Widerspruch zu (2.130)} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.42

a) Beweis von (2.139):

1. Fall: $\alpha = 0$

$$0 + \alpha = 0 + 0 \underset{(2.78)}{=} 0$$

2. Fall: α sei eine Nachfolgerzahl.
   Dann ist $\alpha = \mathrm{s}(\beta)$ für ein $\beta \in \mathrm{Ord}$, und es gilt:

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= 0 + \mathrm{s}(\beta) \quad \text{für ein } \beta \in \mathrm{Ord} \\ &\underset{(2.79)}{=} \mathrm{s}(0 + \beta) \\ &\underset{(\mathrm{Hyp})}{=} \mathrm{s}(\beta) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

3. α sei eine Limes-Ordinalzahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &\underset{(2.80)}{=} \bigcup_{\beta<\alpha} (0 + \beta) \\ &\underset{(\mathrm{Hyp})}{=} \bigcup_{\beta<\alpha} \beta \\ &\underset{(2.77)}{=} \alpha \end{aligned}$$

Beweis von (2.140) durch Induktion über β:

1. Fall: $\beta = 0$

$$\alpha \underset{(2.78)}{=} \alpha + 0 = \alpha + \beta$$

2. Fall: β sei eine Nachfolgerzahl.
   Dann ist $\beta = \mathrm{s}(\delta)$ für ein $\delta \in \mathrm{Ord}$, und es gilt:

$$\alpha \underset{(\mathrm{Hyp})}{\leq} \alpha + \delta \underset{(2.71)}{<} \mathrm{s}(\alpha + \delta) \underset{(2.79)}{=} \alpha + \mathrm{s}(\delta) = \alpha + \beta$$

3. Fall: β sei eine Limes-Ordinalzahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \alpha \underset{(\mathrm{Hyp})}{\leq} \alpha + \delta \text{ für alle } \delta < \beta &\Rightarrow \alpha \leq \sup\{\alpha + \delta \mid \delta < \beta\} \\ &\underset{(2.68)}{\Rightarrow} \alpha \leq \bigcup\{\alpha + \delta \mid \delta < \beta\} \\ &\Rightarrow \alpha \leq \bigcup_{\delta<\beta} (\alpha + \delta) \\ &\underset{(2.80)}{\Rightarrow} \alpha \leq \alpha + \beta \end{aligned}$$

Beweis von (2.141) durch Induktion über β:

1. Fall: $\beta = 0$
   Die Prämisse $\alpha < \beta$ ist immer falsch und die Aussage daher immer wahr.

2. Fall: $\beta = \mathrm{s}(\delta)$ sei eine Nachfolgerzahl mit $\alpha < \beta$.

   Aus der Voraussetzung $\alpha < \beta$ folgt $\alpha \leq \delta$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha \leq \delta \ &\underset{(\mathrm{Hyp})}{\Rightarrow} \gamma + \alpha \leq \gamma + \delta \\ &\underset{(2.71)}{\Rightarrow} \gamma + \alpha < \mathrm{s}(\gamma + \delta) \\ &\underset{(2.79)}{\Rightarrow} \gamma + \alpha < \gamma + \mathrm{s}(\delta) \\ &\Rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta \end{aligned}$$

3. Fall: β sei eine Limes-Ordinalzahl mit $\alpha < \beta$.

   Da β eine Limes-Ordinalzahl ist, gilt nach (2.73) die Beziehung

$$s(\alpha) < \beta \tag{2.8}$$

   Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} &\gamma + \alpha < \mathrm{s}(\gamma + \alpha) \\ &\underset{(2.79)}{\Rightarrow} \gamma + \alpha < \gamma + \mathrm{s}(\alpha) \\ &\underset{(2.62)}{\Rightarrow} \gamma + \alpha \in \gamma + \mathrm{s}(\alpha) \\ &\underset{(2.8)}{\Rightarrow} \gamma + \alpha \in \gamma + \mathrm{s}(\alpha) \in \{\gamma + \delta \mid \delta < \beta\} \\ &\underset{(2.6)}{\Rightarrow} \gamma + \alpha \in \bigcup \{\gamma + \delta \mid \delta < \beta\} = \bigcup_{\delta < \beta} (\gamma + \delta) \underset{(2.80)}{=} \gamma + \beta \\ &\underset{(2.62)}{\Rightarrow} \gamma + \alpha < \gamma + \beta \end{aligned}$$

b) Die Legitimation der transfiniten Induktion ist die gleiche wie bei allen anderen Induktionsbeweisen. Gäbe es ein Gegenbeispiel, also eine Ordinalzahl, die die zu beweisende Eigenschaft nicht erfüllt, so würde sich diese Nichterfüllung aufgrund des bewiesenen Induktionsschritts in Richtung der kleineren Ordinalzahlen vererben und nach endlich vielen Schritten die leere Menge erreichen, im Widerspruch zum Induktionsanfang. Der zentrale Punkt an dieser Stelle ist die Eigenschaft, dass der skizzierte Abstieg die leere Menge in endlich vielen Schritten erreicht, also die Eigenschaft der Ordinalzahlen, keine unendlich absteigenden Ketten zuzulassen.

Lösung zu Aufgabe 2.43

Per Definition gilt die Beziehungen $\alpha + 0 = \alpha$, sodass wir folgendermaßen starten können:

$\alpha+\beta$	$\beta=0$	$\beta=1$	$\beta=n$	$\beta=\omega$
$\alpha=0$	0			
$\alpha=1$	1			
$\alpha=m$	m			
$\alpha=\omega$	ω			

Ist $\alpha \in \mathrm{Ord}$ und n eine endliche Ordinalzahl, so lässt sich mit einem gewöhnlichen Induktionsbeweis folgendes zeigen: Wir erreichen die Zahl $\alpha+n$, indem wir in der Ordinalzahlreihe bei α beginnen und n Positionen voranschreiten, also n mal hintereinander die Nachfolgeroperation auf m anwenden. Dies liefert uns:

$\alpha+\beta$	$\beta=0$	$\beta=1$	$\beta=n$	$\beta=\omega$
$\alpha=0$	0	1	n	
$\alpha=1$	1	2	$\mathrm{s}(n)$	
$\alpha=m$	m	$\mathrm{s}(m)$	$\mathrm{s}^n(m)$	
$\alpha=\omega$	ω	$\mathrm{s}(\omega)$	$\mathrm{s}^n(\omega)$	

Ferner haben wir:

$$m+\omega=\bigcup_{\beta<\omega} m+\beta=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} m+n=\omega$$

Dies ergibt:

$\alpha+\beta$	$\beta=0$	$\beta=1$	$\beta=n$	$\beta=\omega$
$\alpha=0$	0	1	n	ω
$\alpha=1$	1	2	$\mathrm{s}(n)$	ω
$\alpha=m$	m	$\mathrm{s}(m)$	$\mathrm{s}^n(m)$	ω
$\alpha=\omega$	ω	$\mathrm{s}(\omega)$	$\mathrm{s}^n(\omega)$	

Und zu guter Letzt:

$$\omega+\omega=\bigcup_{\beta<\omega} \omega+\beta=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega+n$$

Diese Menge lässt sich, im Vorgriff auf die Ordinalzahlmultiplikation, mit $\omega\cdot 2$ abkürzen, sodass wir das folgende Endergebnis erhalten:

$\alpha+\beta$	$\beta=0$	$\beta=1$	$\beta=n$	$\beta=\omega$
$\alpha=0$	0	1	n	ω
$\alpha=1$	1	2	$\mathrm{s}(n)$	ω
$\alpha=m$	m	$\mathrm{s}(m)$	$\mathrm{s}^n(m)$	ω
$\alpha=\omega$	ω	$\mathrm{s}(\omega)$	$\mathrm{s}^n(\omega)$	$\omega\cdot 2$

Lösung zu Aufgabe 2.44

Per Definition gilt die Beziehungen $\alpha\cdot 0=0$, sodass wir folgendermaßen starten können:

$\alpha\cdot\beta$	$\beta=0$	$\beta=1$	$\beta=n$	$\beta=\omega$
$\alpha=0$	0			
$\alpha=1$	0			
$\alpha=m$	0			
$\alpha=\omega$	0			

Ist $\alpha\in\mathrm{Ord}$ und n eine endliche Ordinalzahl, so lässt sich mit einem gewöhnlichen Induktionsbeweis folgendes zeigen: Wir erreichen die Zahl $m\cdot n$, indem wir in der Reihe der Ordinalzahlen bei 0 beginnen und $m\cdot n$ Positionen voranschreiten, also $(m\cdot n)$ mal hintereinander die Nachfolgeroperation anwenden. Dies liefert uns:

$\alpha\cdot\beta$	$\beta=0$	$\beta=1$	$\beta=n$	$\beta=\omega$
$\alpha=0$	0	0	0	
$\alpha=1$	0	1	n	
$\alpha=m$	0	$\mathrm{s}(m)$	$\mathrm{s}^{n\cdot m}(0)$	
$\alpha=\omega$	0	ω	$\sum_{i=1}^{n}\omega$	

Ferner haben wir:

$$m\cdot\omega=\bigcup_{\beta<\omega}m\cdot\beta=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}n=\omega$$

Dies ergibt:

$\alpha \cdot \beta$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = n$	$\beta = \omega$
$\alpha = 0$	0	0	0	ω
$\alpha = 1$	0	1	n	ω
$\alpha = m$	0	$\mathrm{s}(m)$	$\mathrm{s}^{n \cdot m}(0)$	ω
$\alpha = \omega$	0	ω	$\sum_{i=1}^{n} \omega$	

Und zu guter Letzt:

$$\omega \cdot \omega = \bigcup_{\beta < \omega} \omega \cdot \beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega \cdot n$$

Diese Menge lässt sich, im Vorgriff auf die Ordinalzahlexponentiation, als ω^2 abkürzen und wir erhalten als Endergebnis:

$\alpha \cdot \beta$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = n$	$\beta = \omega$
$\alpha = 0$	0	0	0	ω
$\alpha = 1$	0	1	n	ω
$\alpha = m$	0	$\mathrm{s}(m)$	$\mathrm{s}^{n \cdot m}(0)$	ω
$\alpha = \omega$	0	ω	$\sum_{i=1}^{n} \omega$	ω^2

Lösung zu Aufgabe 2.45

a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_0 \ _{(2.81)} &= \emptyset \\
\mathrm{V}_1 \ _{(2.82)} &= \mathcal{P}(V_0) = \ \{\emptyset\} \\
\mathrm{V}_2 \ _{(2.82)} &= \mathcal{P}(V_1) = \ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
\mathrm{V}_3 \ _{(2.82)} &= \mathcal{P}(V_2) = \ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}
\end{aligned}$$

b) Die iterierte Potenzmengenbildung bedeutet:

$$|\mathrm{V}_{n+1}| = 2^{|\mathrm{V}_n|} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Also haben wir:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{V}_4| &= 2^4 = 16 \\
|\mathrm{V}_5| &= 2^{16} = 65536
\end{aligned}$$

$$|\mathrm{V}_6| = 2^{65536} \approx 2.00352993040684646497907235156025575 \cdot 10^{19728}$$

Die Rechnung zeigt, dass die Anzahl der Elemente innerhalb der Neumann'schen Stufen rasant größer wird. Schon für die Menge V_6 haben wir Schwierigkeiten, die Anzahl der Elemente in Form einer gewöhnlichen Zahl exakt niederzuschreiben.

c) 1. Fall: $\alpha = 0$
Die Menge $\mathrm{V}_0 = \emptyset$ ist eine transitive Menge.

2. Fall: $\alpha = \mathrm{s}(\beta)$ sei eine Nachfolgerzahl.
Dann können wir aus der Induktionsvoraussetzung

$$\mathrm{V}_\beta \text{ ist transitiv} \tag{2.9}$$

den folgenden Schluss ziehen:

$$\begin{aligned} u \in x \in \mathrm{V}_\alpha &\overset{(2.82)}{\Rightarrow} u \in x \in \mathcal{P}(\mathrm{V}_\beta) \\ &\Rightarrow u \in x \subseteq \mathrm{V}_\beta \\ &\Rightarrow u \in \mathrm{V}_\beta \\ &\overset{\substack{(2.9)\\(2.13)}}{\Rightarrow} u \subseteq \mathrm{V}_\beta \\ &\Rightarrow u \in \mathcal{P}(\mathrm{V}_\beta) \\ &\Rightarrow u \in \mathrm{V}_\alpha \end{aligned}$$

3. Fall: α sei eine Limes-Ordinalzahl.
In diesem Fall entsteht V_α durch die Vereinigung transitiver Mengen und die Behauptung folgt aus (2.18).

Lösung zu Aufgabe 2.46

a) Beweis durch transfinite Induktion über α:

1. Fall: $\alpha = \emptyset$

$$\{x \in \mathrm{V}_\alpha \mid x \in \mathrm{Ord}\} \overset{(2.81)}{=} \emptyset = \alpha$$

2. Fall: $\alpha = \mathrm{s}(\gamma)$ sei eine Nachfolgerzahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \beta \in \mathrm{V}_\alpha &\Leftrightarrow \beta \in \mathrm{V}_{\mathrm{s}(\gamma)} \\ &\overset{(2.82)}{\Leftrightarrow} \beta \in \mathcal{P}(\mathrm{V}_\gamma) \\ &\Leftrightarrow \beta \subseteq \mathrm{V}_\gamma \\ &\Leftrightarrow \beta \subseteq \{x \in \mathrm{V}_\gamma \mid x \in \mathrm{Ord}\} \qquad \text{(wegen Korollar 2.28)} \\ &\overset{(\mathrm{Hyp})}{\Leftrightarrow} \beta \subseteq \gamma \\ &\overset{(2.64)}{\Leftrightarrow} \beta \leq \gamma \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\{x \in \mathrm{V}_\alpha \mid x \in \mathrm{Ord}\} &= \{\beta \mid \beta \leq \gamma\} \\ &\underset{(2.63)}{=} \{\beta \mid \beta \in \gamma\} \cup \{\gamma\} \\ &= \gamma \cup \{\gamma\} \\ &= \mathrm{s}(\gamma) \\ &= \alpha\end{aligned}$$

3. Fall: α sei eine Limes-Ordinalzahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\{x \in \mathrm{V}_\alpha \mid x \in \mathrm{Ord}\} &\underset{(2.83)}{=} \{x \in \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathrm{V}_\gamma \mid x \in \mathrm{Ord}\} \\ &= \bigcup_{\gamma<\alpha} \{x \in \mathrm{V}_\gamma \mid x \in \mathrm{Ord}\} \\ &\underset{(\mathrm{Hyp})}{=} \bigcup_{\gamma<\alpha} \gamma \\ &\underset{(2.77)}{=} \alpha\end{aligned}$$

b) 1. Beweis von (2.144)

$$\begin{aligned}\beta \in \alpha &\underset{(2.143)}{\Leftrightarrow} \beta \in \{x \in \mathrm{V}_\alpha \mid x \in \mathrm{Ord}\} \\ &\Leftrightarrow \beta \in \mathrm{V}_\alpha\end{aligned}$$

2. Beweis von (2.145)

$$\begin{aligned}\beta \subseteq \alpha, \gamma \in \beta &\Rightarrow \gamma \in \alpha \\ &\underset{(2.144)}{\Rightarrow} \gamma \in \mathrm{V}_\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta \subseteq \mathrm{V}_\alpha, \gamma \in \beta &\Rightarrow \gamma \in \mathrm{V}_\alpha \\ &\underset{(2.144)}{\Rightarrow} \gamma \in \alpha\end{aligned}$$

3. Beweis von (2.146) und (2.147)

$$\begin{aligned}\alpha \notin \alpha &\underset{(2.144)}{\Rightarrow} \alpha \notin \mathrm{V}_\alpha \\ \alpha \subseteq \alpha &\underset{(2.145)}{\Rightarrow} \alpha \subseteq \mathrm{V}_\alpha\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.47

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $\alpha = \emptyset$.

Dann ist $\mathrm{V}_\alpha = \emptyset$ und die Behauptung trivialerweise wahr.

2. $\alpha = \mathrm{s}(\beta)$ ist eine Nachfolgerzahl.

$$x \in \mathrm{V}_\alpha \Rightarrow\ x \in \mathrm{V}_{\mathrm{s}(\beta)} \text{ mit } \beta < \alpha \ \overset{(2.82)}{\Rightarrow}\ x \in \mathcal{P}(\mathrm{V}_\beta) \text{ mit } \beta < \alpha$$

3. α ist eine Limes-Ordinalzahl.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{V}_\alpha &\overset{(2.83)}{\Rightarrow} x \in \mathrm{V}_\beta \text{ für ein } \beta < \alpha \\ &\overset{(2.84)}{\Rightarrow} x \in \mathrm{V}_{\mathrm{s}(\beta)} \text{ für ein } \beta < \alpha \\ &\overset{(2.82)}{\Rightarrow} x \in \mathcal{P}(\mathrm{V}_\beta) \text{ für ein } \beta < \alpha \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.48

$$\begin{aligned} x \subseteq y &\overset{(2.91)}{\Rightarrow} x \subseteq y \text{ und } y \subseteq \mathrm{V}_{\mathrm{rang}(y)} \\ &\Rightarrow x \subseteq \mathrm{V}_{\mathrm{rang}(y)} \\ &\overset{(2.91)}{\Rightarrow}\ \mathrm{rang}(x) \leq \mathrm{rang}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in y &\overset{(2.91)}{\Rightarrow} x \in y \text{ und } y \subseteq \mathrm{V}_{\mathrm{rang}(y)} \\ &\Rightarrow x \in \mathrm{V}_{\mathrm{rang}(y)} \\ &\overset{(2.148)}{\Rightarrow} x \in \mathcal{P}(\mathrm{V}_\beta) \text{ für ein } \beta < \mathrm{rang}(y) \\ &\Rightarrow x \subseteq \mathrm{V}_\beta \text{ für ein } \beta < \mathrm{rang}(y) \\ &\overset{(2.91)}{\Rightarrow}\ \mathrm{rang}(x) \leq \beta \text{ für ein } \beta < \mathrm{rang}(y) \\ &\Rightarrow\ \mathrm{rang}(x) < \mathrm{rang}(y) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.49

a) 1. Reflexivität
id ist eine bijektive Abbildung von x nach x, also ist $x \simeq x$.

2. Symmetrie

$x \simeq y \Rightarrow$ Es existiert eine bijektive Abbildung f von x nach y
$\Rightarrow f$ ist umkehrbar und f^{-1} ist eine bijektive Abbildung von y nach x
$\Rightarrow y \simeq x$

3. Transitivität

$x \simeq y$ und $y \simeq z \Rightarrow$ Es existiert eine bijektive Abbildung $f : x \to y$ und

es existiert eine bijektive Abbildung $g : y \to z$
$\Rightarrow g \circ f$ ist eine bijektive Abbildung von x nach z
$\Rightarrow x \simeq z$

b) Die moderne Mengenlehre verfolgt das Ziel, Kardinalzahlen als spezielle Mengen zu definieren. Folgen wir Freges Definition, so erhalten wir jedoch echte Klassen. Beispielsweise wäre die Kardinalzahl 1 die Menge aller einelementigen Mengen:

$$1 := \{\{x\} \mid x \text{ ist eine Menge}\}$$

Wäre die Kardinalzahl 1 eine Mengen, so wäre es auch $\bigcup 1$:

$$\bigcup 1 = \{x \mid x \text{ ist eine Menge}\}$$

$\bigcup 1$ wäre dann die *„Menge aller Mengen“*, von der wir wissen, dass sie nicht existieren kann.

Lösung zu Aufgabe 2.50

a) 1. Beweis von (2.151)

Die identische Abbildung $\mathrm{id} : x \to x$ ist eine Bijektion
$\Rightarrow$ id ist eine injektive Abbildung
$\overset{(2.92)}{\Rightarrow} x \preceq x$

2. Beweis von (2.152)

$x \preceq y$ und $y \preceq z$
$\Rightarrow$ Es existieren zwei injektive Abbildungen $f : x \to y$ und $g : y \to z$
$\Rightarrow g \circ f$ ist eine injektive Abbildung von x nach z
$\Rightarrow x \preceq z$

3. Beweis von (2.153)

Die identische Abbildung id ist eine bijektive Abbildung von x nach x und wegen $x \subseteq y$ eine injektive Abbildung von x nach y. Somit ist $x \preceq y$.

4. Beweis von (2.154)

Nach dem Wohlordnungssatz lassen sich x und y wohlordnen, sodass nach Korollar 2.22 zwei Ordinalzahlen α und β mit $x \simeq \alpha$ und $y \simeq \beta$ existieren. Für diese Ordinalzahlen gilt:

$$\overset{(2.133)}{\Rightarrow} \alpha < \beta \text{ oder } \alpha = \beta \text{ oder } \beta > \alpha$$

$$\overset{(2.62)}{\Rightarrow} \alpha \in \beta \text{ oder } \alpha = \beta \text{ oder } \beta \in \alpha$$
$$\overset{(2.53)}{\Rightarrow} \alpha \subseteq \beta \text{ oder } \beta \subseteq \alpha$$
$$\overset{(2.153)}{\Rightarrow} \alpha \preceq \beta \text{ oder } \beta \preceq \alpha$$

5. Beweis von (2.155)

   Die Behauptung folgt unmittelbar aus (2.154).

b) Es ist $\mathbb{N}\backslash\{0\} \subset \mathbb{N}$. Trotzdem existiert mit $f : x \mapsto x - 1$ eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ nach $\mathbb{N}$.

Lösung zu Aufgabe 2.51

a) Es sei v ein Element aus y. Aus $x \succeq y$ folgt die Existenz einer injektiven Abbildung $f : y \to x$. Die Umkehrung dieser Funktion ist eine Bijektion von $\mathrm{ran}(f)$ nach y. Diese Funktion lässt sich zu einer surjektiven Funktion $h : x \to y$ erweitern, indem jedem Element aus der Menge $x \setminus \mathrm{ran}(f)$ das Element v zugeordnet wird:

$$h := f^{-1} \cup \{(u, v) \mid u \in x \setminus \mathrm{ran}(f)\} \tag{2.10}$$

Wir nehmen jetzt umgekehrt an, es gäbe eine surjektive Funktion f von x nach y. Dann hat die Menge

$$\{\{(v, u) \mid f(u) = v\} \mid v \in y\}$$

ein Auswahlfunktion. Diese Funktion ist eine injektive Abbildung von y nach x und beweist $y \preceq x$.

b) Nein. Ist $x = \emptyset$ und $y \neq \emptyset$, so existiert mit $\emptyset$ eine surjektive Abbildung von x nach y, aber keine injektive Abbildung von y nach x. Also ist $x \not\succeq y$.

Ist $x \neq \emptyset$ und $y = \emptyset$, so existiert keine surjektive Abbildung von x nach y, aber mit $\emptyset$ eine injektive Abbildung von y nach x. Also ist $x \succeq y$.

Sind x und y beide die leere Menge, so ist die zu beweisende Aussage wahr.

Lösung zu Aufgabe 2.52

Beweis von (2.157)

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion.

1. Induktionsanfang

Wir nehmen an, n sei gleich 0 oder m sei gleich 0. OBdA sei $n = 0$. Aus der Voraussetzung $n \neq m$ folgt dann $m > 0$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
& (y \setminus \operatorname{ran}(f)) \cap \operatorname{ran}(f) = \emptyset \\
\Rightarrow\ & (y \setminus \operatorname{ran}(f)) \cap f(\operatorname{dom}(h_{m-1})) = \emptyset \\
\overset{(2.100)}{\Rightarrow}\ & g(y \setminus \operatorname{ran}(f)) \cap g(f(\operatorname{dom}(h_{m-1}))) = \emptyset \\
\overset{(2.101)}{\underset{(2.102)}{\Rightarrow}}\ & \operatorname{dom}(h_0) \cap \operatorname{dom}(h_m) = \emptyset
\end{aligned}$$

2. Induktionsschritt

   Wir beweisen die Behauptung für die Zahlen $n + 1$ und $m + 1$ unter der Voraussetzung, dass die Behauptung für n und m wahr ist.

$$\begin{aligned}
& n + 1 \neq m + 1 \Rightarrow n \neq m \\
\overset{(\text{Hyp})}{\Rightarrow}\ & \operatorname{dom}(h_n) \cap \operatorname{dom}(h_m) = \emptyset \\
\overset{(2.99)}{\Rightarrow}\ & f(\operatorname{dom}(h_n)) \cap f(\operatorname{dom}(h_m)) = \emptyset \\
\overset{(2.100)}{\Rightarrow}\ & g(f(\operatorname{dom}(h_n))) \cap g(f(\operatorname{dom}(h_m))) = \emptyset \\
\overset{(2.102)}{\Rightarrow}\ & \operatorname{dom}(h_{n+1}) \cap \operatorname{dom}(h_{m+1}) = \emptyset
\end{aligned}$$

Beweis von (2.158)

Wir zeigen: Aus $h(u) = h(v)$ folgt $u = v$. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. $u \in \operatorname{dom}(h_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $v \in \operatorname{dom}(h_m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
h(u) = h(v) \ \overset{(2.106)}{\Rightarrow}\ & h_n(u) = h_m(v) \\
\overset{(2.101)}{\underset{(2.102)}{\Rightarrow}}\ & g^{-1}(u) = g^{-1}(v) \\
\Rightarrow\ & u = v
\end{aligned}$$

2. $u \in \operatorname{dom}(h_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $v \notin \operatorname{dom}(h_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
h(u) = h(v) \ \overset{(2.106)}{\underset{(2.107)}{=}}\ & h_n(u) = f(v) \\
\Rightarrow\ & f(v) \in \operatorname{ran}(h_n) \\
\Rightarrow\ & f(v) \in \operatorname{ran}(h_0) \text{ oder } f(v) \in \operatorname{ran}(h_{l+1}) \text{ für ein } l \in \mathbb{N} \\
\overset{(2.103)}{\underset{(2.104)}{\Rightarrow}}\ & f(v) \in y \setminus \operatorname{ran}(f) \text{ oder } f(v) \in f(\operatorname{dom}(h_l)) \\
\overset{(2.99)}{\Rightarrow}\ & f(v) \notin \operatorname{ran}(f) \text{ oder } v \in \operatorname{dom}(h_l)
\end{aligned}$$

   Beides ist unmöglich, sodass der betrachtete Fall niemals eintreten kann. Das gleiche gilt für den symmetrischen Fall, in dem n und m die Rollen vertauschen.

3. $u \notin \operatorname{dom}(h_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $v \notin \operatorname{dom}(h_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$

$$h(u) = h(v) \ \overset{(2.107)}{\Rightarrow}\ f(u) = f(v)$$

$$\overset{(2.99)}{\Rightarrow} u = v$$

Beweis von (2.159)

Wir zeigen: Aus $v \in y$ folgt $v \in \mathrm{ran}(h)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

$g(v) \in \mathrm{dom}(h_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\overset{(2.106)}{\Rightarrow} h(g(v)) = h_n(g(v)) \overset{\substack{(2.101)\\(2.102)}}{=} g^{-1}(g(v)) = v \\
&\Rightarrow v \in \mathrm{ran}(h)
\end{aligned}$$

$g(v) \notin \mathrm{dom}(h_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow g(v) \notin \mathrm{dom}(h_0) \text{ und } g(v) \notin \mathrm{dom}(h_{n+1}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\
&\overset{\substack{(2.101)\\(2.102)}}{\Rightarrow} g(v) \notin g(y \setminus \mathrm{ran}(f)) \text{ und } g(v) \notin g(f(\mathrm{dom}(h_n))) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\
&\overset{(2.100)}{\Rightarrow} v \notin y \setminus \mathrm{ran}(f) \text{ und } v \notin f(\mathrm{dom}(h_n)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow v \in \mathrm{ran}(f) \text{ und } v \notin f(\mathrm{dom}(h_n)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \text{Es existiert ein } u \in x \text{ mit } f(u) = v \text{ und } v \notin f(\mathrm{dom}(h_n)) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\
&\overset{(2.99)}{\Rightarrow} u \notin \mathrm{dom}(h_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\
&\overset{(2.107)}{\Rightarrow} h(u) = f(u) = v \\
&\Rightarrow v \in \mathrm{ran}(h)
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.53

a) Wir haben:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \quad \text{mit } \mathrm{dom}(f) = (-1\,;1) \\
g(x) &= \frac{x}{2} \quad \text{mit } \mathrm{dom}(f) = [-1\,;1]
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
h_0(x) = 2x \quad \text{mit} \quad \mathrm{dom}(h_0) &= g([0\,;1] \setminus \mathrm{ran}(f)) \\
&= g([-1\,;1] \setminus (-1\,;1)) \\
&= g(\{-1, 1\}) \\
&= \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \\
h_1(x) = 2x \quad \text{mit} \quad \mathrm{dom}(h_1) &= g(f(\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\})) \\
&= \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}
\end{aligned}$$

$$h_2(x) = 2x \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \operatorname{dom}(h_2) &= g(f(\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\})) \\ &= \{-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\} \\ &\dots \end{aligned}$$

b) Wir haben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} \quad \text{mit} \quad \operatorname{dom}(f) = [-1\,;1] \\ g(x) &= x \quad \text{mit} \quad \operatorname{dom}(f) = (-1\,;1) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} h_0(x) = x \quad \text{mit} \quad \operatorname{dom}(h_0) &= g((-1\,;1) \setminus \operatorname{ran}(f)) \\ &= g((-1\,;1) \setminus [-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}]) \\ &= g((-1\,;-\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}\,;1)) \\ &= (-1\,;-\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}\,;1) \\ h_1(x) = x \quad \text{mit} \quad \operatorname{dom}(h_1) &= g(f((-1\,;-\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}\,;1))) \\ &= (-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}) \\ h_2(x) = x \quad \text{mit} \quad \operatorname{dom}(h_2) &= g(f((-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}))) \\ &= (-\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{8}) \cup (\frac{1}{8}\,;\frac{1}{4}) \\ &\dots \end{aligned}$$

Die Funktion h entsteht aus der Vereinigung aller h_n, mit der zusätzlichen Vereinbarung, dass alle x, die in keinem Definitionsbereich einer dieser Funktionen enthalten sind, über die Funktion f in die Menge y abgebildet werden. Außerhalb des Definitionsbereich liegen genau die Brüche der Form $\pm\frac{1}{2^{n+1}}$ mit $n \in \mathbb{N}$, sodass wir als Ergebnis die Umkehrfunktion der in Teil a) konstruierten Funktion enthalten. Die gegenseitige Zuordnungen der Elemente aus den Mengen $(0\,;1)$ und $[0\,;1]$ ist also in beiden Fällen exakt die gleiche.

Lösung zu Aufgabe 2.54

1. Beweis von (2.160)

   (a) Wir zeigen: $(0\,;1)^n \preceq (0\,;1)$

Für $n = 2$ können wir die folgende Zuordnung wählen, die sich mühelos auf größere n verallgemeinern lässt:

$$(0, a_1a_2a_3\ldots,\ 0, b_1b_2b_3\ldots) \mapsto 0, a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$$

(b) Wir zeigen $(0\,;1) \preceq (0\,;1)^n$
Wir wählen die Abbildung: $x \mapsto (x, 0, \ldots, 0)$

Aus dem Satz von Cantor-Schröder-Bernstein folgt die Behauptung.

2. Beweis von (2.161)

(a) Wir zeigen: $(0\,;1) \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$
Wir gehen von der Binärstellung der reellen Zahlen aus und wählen die Zuordnung:

$$0, a_1a_2a_3 \mapsto \{n \mid a_n = 1\}$$

(b) Wir zeigen $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq (0\,;1)$
Wir konstruieren die reelle Zahl aus dem Intervall $(0\,;1)$ so, dass die Nachkommaziffer an der Position $2n$ auf 1 gesetzt wird, wenn die Zahl n in der Teilmenge vorhanden ist. Alle anderen Ziffern setzen wir auf 0. Dass die Ziffern an den ungeraden Nachkommapositionen allesamt gleich 0 sind, ist eine bewusste Entscheidung. Hierdurch ist sichergestellt, dass keine unendlichen 1er-Ketten entstehen und jedes Ziffernmuster somit eindeutig einer reellen Zahl entspricht.

Aus dem Satz von Cantor-Schröder-Bernstein folgt die Behauptung.

3. Beweis von (2.162)

(a) Wir zeigen: $(0\,;1) \preceq \mathbb{R}$
Die Behauptung ist trivial, da die identische Abbildung das Gewünschte leistet.

(b) Wir zeigen: $\mathbb{R} \preceq (0\,;1)$
Eine mögliche Zuordnung ist die folgende:

$$a_0\ldots a_n, b_0b_1\ldots \mapsto 0, a_0b_0a_1b_1\ldots a_nb_n0b_{n+1}\ldots$$

Aus dem Satz von Cantor-Schröder-Bernstein folgt die Behauptung.

4. Beweis von (2.163)

Wir erhalten eine Bijektion, indem wir die in (2.162) konstruierte Bijektion komponentenweise anwenden.

5. Beweis von (2.164)

$$\mathbb{R}^n \underset{(2.163)}{\simeq} (0\,;1)^n \underset{(2.160)}{\simeq} (0\,;1) \underset{(2.162)}{\simeq} \mathbb{R}$$

6. Beweis von (2.165)

$$\mathbb{R}^n \underset{(2.163)}{\simeq} (0\,;1)^n \underset{(2.160)}{\simeq} (0\,;1) \underset{(2.161)}{\simeq} \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Lösung zu Aufgabe 2.55

a) 1. Beweis von (2.166) und (2.167)

$$x \prec y \text{ und } y \preceq z \Rightarrow x \preceq y \text{ und } y \preceq z \underset{(2.152)}{\Rightarrow} x \preceq z$$

Wir zeigen durch Widerspruch: $x \not\simeq z$:

$$\begin{aligned} x \prec y \text{ und } y \preceq z \text{ und } x \simeq z &\Rightarrow x \prec y \text{ und } y \preceq z \text{ und } z \preceq x \\ &\underset{(2.152)}{\Rightarrow} x \prec y \text{ und } y \preceq x \\ &\underset{(2.94)}{\Rightarrow} x \not\simeq y \text{ und } x \preceq y \text{ und } y \preceq x \\ &\underset{(2.98)}{\Rightarrow} x \not\simeq y \text{ und } x \simeq y \end{aligned}$$

Der Beweis von (2.167) erfolgt analog.

2. Beweis von (2.168) und (2.169)

$$\begin{aligned} x \prec y \text{ und } y \subseteq z &\underset{(2.153)}{\Rightarrow} x \prec y \text{ und } y \preceq z \underset{(2.166)}{\Rightarrow} x \prec z \\ x \subseteq y \text{ und } y \prec z &\underset{(2.153)}{\Rightarrow} x \preceq y \text{ und } y \prec z \underset{(2.167)}{\Rightarrow} x \prec z \end{aligned}$$

3. Beweis von (2.170) und (2.171)

$$\begin{aligned} x \prec y \text{ und } y \simeq z &\Rightarrow x \prec y \text{ und } y \preceq z \underset{(2.166)}{\Rightarrow} x \prec z \\ x \simeq y \text{ und } y \prec z &\Rightarrow x \preceq y \text{ und } y \prec z \underset{(2.167)}{\Rightarrow} x \prec z \end{aligned}$$

4. Beweis von (2.172)

$$x \prec y \text{ und } y \prec z \Rightarrow x \preceq y \text{ und } y \prec z \underset{(2.166)}{\Rightarrow} x \prec z$$

b) Die Beziehung ist bereits durch (2.156) widerlegt. Man setze $x = y$.

Lösung zu Aufgabe 2.56

1. Wir zeigen: $\mathrm{s}(\alpha) \geq \omega \Rightarrow \alpha \geq \omega$

   Da ω eine Limes-Ordinalzahl ist, gilt $\mathrm{s}(\alpha) \neq \omega$. (2.11)

   Hieraus folgt:

$$\mathrm{s}(\alpha) \geq \omega \underset{(2.11)}{\Rightarrow} \mathrm{s}(\alpha) > \omega$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(2.62)}{(2.70)} \Rightarrow \omega \in \alpha \cup \{\alpha\} \\
&\qquad \Rightarrow \omega \in \alpha \text{ oder } \omega = \alpha \\
&\overset{(2.62)}{(2.63)} \Rightarrow \omega \leq \alpha
\end{aligned}$$

2. Wir zeigen: $\alpha \geq \omega \Rightarrow \alpha \simeq \mathrm{s}(\alpha)$

   Aus $\alpha \geq \omega$ folgt $\omega \subseteq \alpha$, d. h., α enthält alle natürlichen Zahlen. Dies nutzen wir folgendermaßen aus: Wir bilden das einzige Element, das in $\mathrm{s}(\alpha)$, aber nicht in α enthalten ist (dieses Element ist die Menge α selbst) auf die Zahl 0 ab und alle anderen natürlichen Zahlen auf deren direkten Nachfolger. Alle anderen Ordinalzahlen bilden wir auf sich selbst ab. Dies führt zu der folgenden Funktion, die eine Bijektion von $\mathrm{s}(\alpha)$ nach α ist:

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta + 1 & \text{für } \beta \in \omega \\ \beta & \text{für } \beta \in \alpha \setminus \omega \\ 0 & \text{für } \beta = \alpha \end{cases} \tag{2.12}$$

Lösung zu Aufgabe 2.57

Der Fall, dass α eine Nachfolgerzahl ist, bereitet keine Probleme. Die Argumentationskette bricht für den Fall, dass α eine Limes-Ordinalzahl ist, und zwar an der folgenden Stelle:

$$\beta \subset \aleph_\beta \text{ für alle } \beta < \alpha \not\Rightarrow \bigcup_{\beta<\alpha} \beta \subset \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$$

Wir haben auch keine Chance, die Behauptung zu beweisen, denn Kardinalzahlen mit der Fixpunkteigenschaft $\alpha = \aleph_\alpha$ gibt es wirklich. Eine solche Zahl können wir erhalten, indem wir über die Definition

$$\alpha_0 := \aleph_0 \tag{2.13}$$

$$\aleph_{n+1} := \aleph_{\alpha_n} \tag{2.14}$$

die Folge

$$\aleph_0, \aleph_{\aleph_0}, \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}, \ldots$$

bilden und diese Zahlen miteinander vereinen:

$$\alpha := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \tag{2.15}$$

Nach (2.66) ist die Vereinigungsmenge eine Ordinalzahl α, und es lässt sich zeigen, dass α die Beziehung $\alpha = \aleph_\alpha$ erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 2.58

Für den Beweis durchlaufen wir die in Abbildung 2.1 zusammengefasste Argumentationskette.

Beweis:

1. P ist die Menge

$$P := \{f : G \to \{0,1\} \mid \text{ dom}(f) \text{ ist endlich}\}$$

   Da G überabzählbar viele Elemente enthält, ist auch P eine überabzählbare Menge.

2. Aus p konstruieren wir die Menge

$$Q := \{\text{dom}(f) \mid f \in P\}$$

   Haben zwei Funktionen aus P den gleichen Definitionsbereich, so werden sie in Q zu ein und demselben Element. Es können in P aber immer nur endlich viele Funktionen den gleichen Definitionsbereich aufweisen. Partitionieren wir P entsprechend der Definitionsbereiche in Äquivalenzklassen, so erhalten wir überabzählbar viele Partitionen, in denen jeweils endlich vielen Funktionen vorhanden sind. Jede Äquivalenzklasse entspricht eineindeutig einem Element in Q, sodass Q ebenfalls überabzählbar viele Elemente enthalten muss.

3. Aus dem Δ-Lemma folgt die Existenz eines überabzählbaren Δ-Systems $R \subseteq Q$. Da alle Mengen in Q endlich sind, ist auch der Schnitt S zweier Elemente aus R eine endliche Menge.

4. Jedes Element aus R wird von (endlich vielen) Funktionen aus P erzeugt. Wählen wir für jedes Element aus R eine solche Funktion aus, so erhalten wir eine unendliche Schar von Funktionen, die allesamt auf der endlichen Menge S definiert sind. Da es nur endlich viele Möglichkeiten gibt, den Elementen aus S einen der Funktionswerte 0 oder 1 zuzuordnen, müssen Funktionen f_α und f_β existieren, die auf S identisch sind, es gilt also:

$$f_\alpha|_S = f_\beta|_S$$

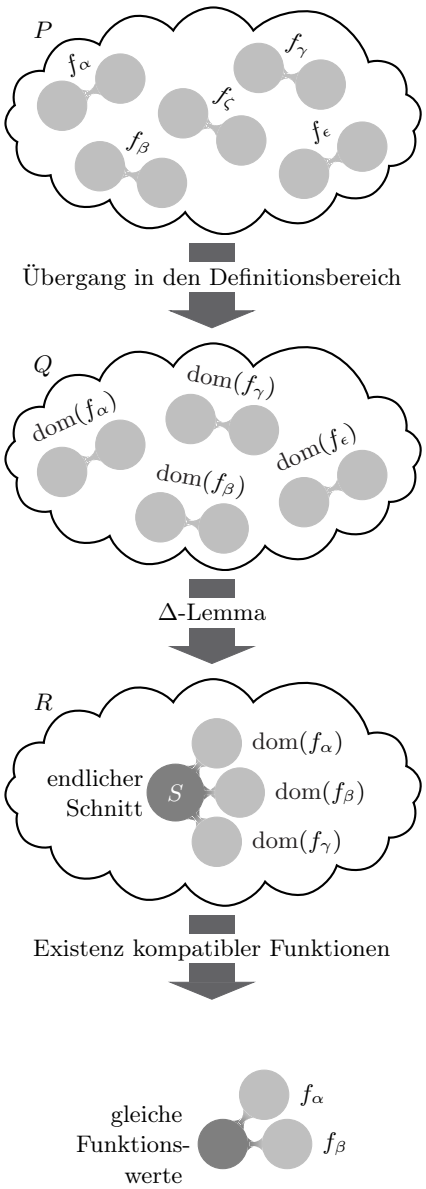
   Außerhalb von S sind die Definitionsbereiche disjunkt, und das bedeutet, dass die Mengen f_α und f_β als Funktionen kompatibel sind.

□

Beachten Sie, dass wir im Beweisschritt 3 eine Menge R mit überabzählbar vielen Elementen erhalten haben, im Schritt 4 aber nur erforderlich war, dass diese Menge

unendlich viele Elemente umfasst. Dennoch war es wichtig, den Beweis mit einer überabzählbaren Menge P zu beginnen, da wir nur so die Voraussetzung des Δ-Lemmas erfüllen.

Die Bedingung, dass die betrachteten Funktionen in die Menge $\{0, 1\}$ abbildet, lässt sich durch die Forderung ersetzen, dass die Zielmenge endlich ist, ohne den Beweis ändern zu müssen. Wir werden das bewiesene Lemma später aber nur in der spezielleren Form benötigen.



Ausgangspunkt ist eine Menge P von partiellen Funktionen, die in die Menge $\{0, 1\}$ abbilden. Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist eine endliche Teilmenge einer überabzählbaren Grundmenge.

Die Menge Q fasst die Definitionsbereiche der in P enthaltenen Funktionen zusammen. Die Menge ist immer noch überabzählbar, da in P immer nur endlich viele Funktionen mit dem jeweils gleichen Definitionsbereich enthalten sein können.

Das Δ-Lemma garantiert die Existenz einer überabzählbaren Teilmenge $R \subseteq Q$ mit der Eigenschaft, dass zwei verschiedene Elemente stets die gleiche (endliche) Schnittmenge S ergeben.

Da es nur endlich viele Möglichkeiten gibt, die Elementen aus S auf $\{0, 1\}$ abzubilden, aber unendlich viele Funktionen in P existieren, deren Definitionsbereiche S als Schnitt ergeben, müssen in P Funktionen existieren, die auf S übereinstimmen. Diese Funktionen sind kompatibel.

Abbildung 2.1: Die Argumentationskette in der Übersicht

3 Formale Systeme

Lösung zu Aufgabe 3.1

a) Die Wahrheitstabelle zeigt, dass alle vier Formeln äquivalent zueinander sind:

φ	ψ	χ	$(\varphi \wedge \psi) \to \chi$	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \to (\chi \wedge \psi)$	$(\varphi \to \chi) \vee \neg\psi$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

b) Analog zu a). Die Wahrheitstabellen sind so gestaltet, dass in der Ergebnisspalte ausschließlich der Wahrheitswert 1 vorkommt.

Lösung zu Aufgabe 3.2

Beweis: Zunächst folgt aus der Bijektivität von f:

$$x = y \;\Leftrightarrow\; \pi(x) = \pi(y) \quad \text{für alle } x, y \in U_1 \tag{3.1}$$

$$\text{Für alle } y \in U_2 \text{ existiert ein } x \in U_1 \text{ mit } \pi(x) = y \tag{3.2}$$

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über den Formelaufbau von φ.

1. φ ist die Elementarformel $\mathsf{x} \in \mathsf{y}$.

$$\begin{aligned}(U_1, I_1) \models \mathsf{x} \in \mathsf{y} &\overset{(3.9)}{\Leftrightarrow} (I_1(\mathsf{x}), I_1(\mathsf{y})) \in I_1(\in)\\ &\overset{(3.53)}{\Leftrightarrow} (\pi(I_1(\mathsf{x})), \pi(I_1(\mathsf{y}))) \in I_2(\in)\\ &\overset{(3.54)}{\Leftrightarrow} (I_2(\mathsf{x}), I_2(\mathsf{y})) \in I_2(\in)\\ &\overset{(3.9)}{\Leftrightarrow} (U_2, I_2) \models \mathsf{x} \in \mathsf{y}\end{aligned}$$

2. φ ist die Elementarformel $\mathsf{x} = \mathsf{y}$.

$$\begin{aligned}(U_1, I_1) \models \mathsf{x} = \mathsf{y} &\overset{(3.10)}{\Leftrightarrow} I_1(\mathsf{x}) = I_1(\mathsf{y}) \\ &\overset{(3.1)}{\Leftrightarrow} \pi(I_1(\mathsf{x})) = \pi(I_1(\mathsf{y})) \\ &\overset{(3.54)}{\Leftrightarrow} I_2(\mathsf{x}) = I_2(\mathsf{y}) \\ &\overset{(3.10)}{\Leftrightarrow} (U_2, I_2) \models \mathsf{x} = \mathsf{y}\end{aligned}$$

3. φ ist die Formel $\neg\psi$.

$$\begin{aligned}(U_1, I_1) \models \neg\psi &\overset{(3.11)}{\Leftrightarrow} (U_1, I_1) \not\models \psi \\ &\overset{(\text{Hyp})}{\Leftrightarrow} (U_2, I_2) \not\models \psi \\ &\overset{(3.11)}{\Leftrightarrow} (U_2, I_2) \models \neg\psi\end{aligned}$$

4. φ ist die Formel $\psi \vee \chi$.

$$\begin{aligned}(U_1, I_1) \models \psi \vee \chi &\overset{(3.14)}{\Leftrightarrow} (U_1, I_1) \models \psi \text{ oder } (U_1, I_1) \models \chi \\ &\overset{(\text{Hyp})}{\Leftrightarrow} (U_2, I_2) \models \psi \text{ oder } (U_2, I_2) \models \chi \\ &\overset{(3.14)}{\Leftrightarrow} (U_2, I_2) \models \psi \vee \chi\end{aligned}$$

5. φ hat die Form $\exists\mathsf{x}\,\psi$.

   Erfüllen zwei Interpretationen (U_1, I_1) und (U_2, I_2) die Beziehungen (3.53) und (3.54), so werden diese Beziehungen auch von den Interpretationen $(U_1, I_1\frac{u}{\mathsf{x}})$ und $(U_2, I_2\frac{\pi(u)}{\mathsf{x}})$ erfüllt. Somit gilt:

$$\begin{aligned}(U_1, I_1) \models \exists\mathsf{x}\,\psi &\overset{(3.16)}{\Leftrightarrow} \text{Es gibt ein } u \in U_1 \text{ mit } (U_1, I_1\tfrac{u}{\mathsf{x}}) \models \psi \\ &\overset{(\text{Hyp})}{\Leftrightarrow} \text{Es gibt ein } u \in U_1 \text{ mit } (U_2, I_2\tfrac{\pi(u)}{\mathsf{x}}) \models \psi \\ &\overset{(3.2)}{\rightleftarrows} \text{Es gibt ein } v \in U_2 \text{ mit } (U_2, I_2\tfrac{v}{\mathsf{x}}) \models \psi \\ &\overset{(3.16)}{\Leftrightarrow} (U_2, I_2) \models \exists\mathsf{x}\,\psi\end{aligned}$$

□

Lösung zu Aufgabe 3.3

$$\begin{aligned}&(U, I) \models \forall\mathsf{x}\,(\varphi \wedge \psi) \\ &\overset{(3.13)}{\Leftrightarrow} \text{Für alle } u \in U \text{ ist } (U, I\tfrac{u}{\mathsf{x}}) \models \varphi \wedge \psi \\ &\overset{(3.15)}{\Leftrightarrow} \text{Für alle } u \in U \text{ ist } (U, I\tfrac{u}{\mathsf{x}}) \models \varphi \text{ und } (U, I\tfrac{u}{\mathsf{x}}) \models \psi \\ &\quad\Leftrightarrow \text{Für alle } u \in U \text{ ist } (U, I\tfrac{u}{\mathsf{x}}) \models \varphi \text{ und} \\ &\qquad \text{für alle } u \in U \text{ ist } (U, I\tfrac{u}{\mathsf{x}}) \models \psi \\ &\overset{(3.13)}{\Leftrightarrow} (U, I) \models \forall\mathsf{x}\,\varphi \text{ und } (U, I) \models \forall\mathsf{x}\,\psi\end{aligned}$$

$$\overset{(3.15)}{\Leftrightarrow} (U,I) \models \forall \mathsf{x}\, \varphi \wedge \forall \mathsf{x}\, \psi$$

$(U,I) \models \exists \mathsf{x}\, (\varphi \vee \psi)$

$\overset{(3.16)}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein $u \in U$ mit $(U, I\frac{u}{\mathsf{x}}) \models \varphi \vee \psi$

$\overset{(3.14)}{\Leftrightarrow}$ Es existiert ein $u \in U$ mit $(U, I\frac{u}{\mathsf{x}}) \models \varphi$ oder $(U, I\frac{u}{\mathsf{x}}) \models \psi$

$\Leftrightarrow$ Es existiert ein $u \in U$ ist $(U, I\frac{u}{\mathsf{x}}) \models \varphi$ oder
es existiert ein $u \in U$ ist$(U, I\frac{u}{\mathsf{x}}) \models \psi$

$\overset{(3.16)}{\Leftrightarrow} (U,I) \models \exists \mathsf{x}\, \varphi$ oder $(U,I) \models \exists \mathsf{x}\, \psi$

$\overset{(3.14)}{\Leftrightarrow} (U,I) \models \exists \mathsf{x}\, \varphi \vee \exists \mathsf{x}\, \psi$

Lösung zu Aufgabe 3.4

a) Dass die beiden Beziehungen falsch sind, wird sofort ersichtlich, wenn wir die Implikation durch die beiden Junktoren ‚$\neg$' und ‚$\vee$' ersetzen. Dies zeigt zugleich wie die Beziehungen richtig lauten müssen:

$$\begin{aligned}
\forall \mathsf{x}\, (\psi \to \varphi) &\equiv \forall \mathsf{x}\, (\neg\psi \vee \varphi) \\
&\overset{(3.19)}{\equiv} (\forall \mathsf{x}\, \neg\psi) \vee \varphi \\
&\overset{(3.8)}{\equiv} (\neg\exists \mathsf{x}\, \psi) \vee \varphi \\
&\equiv (\exists \mathsf{x}\, \psi) \to \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exists \mathsf{x}\, (\psi \to \varphi) &\equiv \exists \mathsf{x}\, (\neg\psi \vee \varphi) \\
&\overset{(3.22)}{\equiv} (\exists \mathsf{x}\, \neg\psi) \vee \varphi \\
&\overset{(3.8)}{\equiv} (\neg\forall \mathsf{x}\, \psi) \vee \varphi \\
&\equiv (\forall \mathsf{x}\, \psi) \to \varphi
\end{aligned}$$

b) Nein. Die Gesetze sind falsch, da wir dann eine der beiden Quantorenverschiebungen durchführen würden, die wir in Teil a) als falsch erkannt haben. Dies wird offensichtlich, wenn wir die Operatoren über die beiden Junktoren ‚$\neg$' und ‚$\vee$' ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\forall x\, (\varphi \leftrightarrow \psi) &\equiv \forall x\, ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\
&\overset{(3.55)}{\equiv} \forall x\, (\varphi \to \psi) \wedge \forall x\, (\psi \to \varphi) \\
&\not\equiv (\varphi \to \forall x\, \psi) \wedge (\forall x\, \psi \to \varphi) \\
&\equiv \varphi \leftrightarrow \forall x\, \psi
\end{aligned}$$

$$\forall x\, (\varphi \not\leftrightarrow \psi) \equiv \forall x\, ((\neg\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \neg\varphi))$$

$$\begin{aligned}
{}_{(3.55)} &\equiv \forall\, x\ (\neg\varphi \to \psi) \wedge \forall\, x\ (\psi \to \neg\varphi) \\
&\not\equiv (\neg\varphi \to \forall\, x\ \psi) \wedge (\forall\, x\ \psi \to \neg\varphi) \\
&\equiv \neg\varphi \leftrightarrow \forall\, x\ \psi \\
&\equiv \varphi \not\leftrightarrow \forall\, x\ \psi
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3.5

Vorbemerkung: Wir benutzen im Beweis die Beziehungen

$$\vdash_{\mathrm{PL1}}\ \mathsf{y} = \mathsf{x} \to \mathsf{x} = \mathsf{y}, \tag{3.3}$$

die sich genauso beweisen lässt wie die im Kapiteltext bewiesene Beziehung

$$\vdash_{\mathrm{PL1}}\ \mathsf{x} = \mathsf{y} \to \mathsf{y} = \mathsf{x}.$$

die wir im Kapiteltext bewiesen haben, sowie die Beziehung

$$\begin{aligned}
\vdash_{\mathrm{PL1}}\ &(\mathsf{y} = \mathsf{x} \to \mathsf{x} = \mathsf{y}) \to \\
&((\mathsf{x} = \mathsf{y} \to (\mathsf{y} = \mathsf{z} \to \mathsf{x} = \mathsf{z})) \to (\mathsf{y} = \mathsf{x} \to (\mathsf{y} = \mathsf{z} \to \mathsf{x} = \mathsf{z}))),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

die wir erhalten, wenn für φ, ψ und χ die in der Aufgabe angegeben Formeln eingesetzt werden. Damit gelingt der Beweis folgendermaßen:

1. $\vdash_{\mathrm{PL1}}\ \mathsf{y} = \mathsf{x} \to \mathsf{x} = \mathsf{y}$ (3.3)
2. $\vdash_{\mathrm{PL1}}\ (\mathsf{y} = \mathsf{x} \to \mathsf{x} = \mathsf{y}) \to$
   $((\mathsf{x} = \mathsf{y} \to (\mathsf{y} = \mathsf{z} \to \mathsf{x} = \mathsf{z})) \to (\mathsf{y} = \mathsf{x} \to (\mathsf{y} = \mathsf{z} \to \mathsf{x} = \mathsf{z})))$ (3.4)
3. $\vdash_{\mathrm{PL1}}\ (\mathsf{x} = \mathsf{y} \to (\mathsf{y} = \mathsf{z} \to \mathsf{x} = \mathsf{z})) \to (\mathsf{y} = \mathsf{x} \to (\mathsf{y} = \mathsf{z} \to \mathsf{x} = \mathsf{z}))$ (MP 1,2)
4. $\vdash_{\mathrm{PL1}}\ \mathsf{x} = \mathsf{y} \to (\mathsf{y} = \mathsf{z} \to \mathsf{x} = \mathsf{z})$ (A7)
5. $\vdash_{\mathrm{PL1}}\ \mathsf{y} = \mathsf{x} \to (\mathsf{y} = \mathsf{z} \to \mathsf{x} = \mathsf{z})$ (MP 3,4)
6. $\vdash_{\mathrm{PL1}}\ \forall\, \mathsf{z}\ (\mathsf{y} = \mathsf{x} \to (\mathsf{y} = \mathsf{z} \to \mathsf{x} = \mathsf{z}))$ (G 5)
7. $\vdash_{\mathrm{PL1}}\ \forall\, \mathsf{y}\ \forall\, \mathsf{z}\ (\mathsf{y} = \mathsf{x} \to (\mathsf{y} = \mathsf{z} \to \mathsf{x} = \mathsf{z}))$ (G 6)
8. $\vdash_{\mathrm{PL1}}\ \forall\, \mathsf{x}\ \forall\, \mathsf{y}\ \forall\, \mathsf{z}\ (\mathsf{y} = \mathsf{x} \to (\mathsf{y} = \mathsf{z} \to \mathsf{x} = \mathsf{z}))$ (G 7)

Lösung zu Aufgabe 3.6

Mithilfe der eingeführten Meta-Schlussregeln gelingt der Beweis folgendermaßen:

1. $\vdash_{\mathrm{PL1}}\ \exists\, \mathsf{y}\ \forall\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{y} \leftrightarrow \mathsf{u} \notin \mathsf{u})$ (Hyp)

2. $\vdash_{\mathrm{PL1}} \forall u\,(u \in c \leftrightarrow u \notin u)$ (C 1)
3. $\vdash_{\mathrm{PL1}} \forall u\,(u \in c \leftrightarrow u \notin u) \rightarrow (c \in c \leftrightarrow c \notin c)$ (A4)
4. $\vdash_{\mathrm{PL1}} (c \in c \leftrightarrow c \notin c)$ (MP 2,3)
5. $\vdash_{\mathrm{PL1}} \exists y\,(y \in y \leftrightarrow y \notin y)$ (D 4)

Lösung zu Aufgabe 3.7

1. $\vdash_{\mathrm{PL1}} u \in x \rightarrow u \in x$ (Tautologie)
2. $\vdash_{\mathrm{PL1}} x = y \rightarrow ((u \in x \rightarrow u \in x) \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in y))$
   $\rightarrow ((u \in x \rightarrow u \in x) \rightarrow (x = y \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in y)))$ (Tautologie)
3. $\vdash_{\mathrm{PL1}} x = y \rightarrow ((u \in x \rightarrow u \in x) \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in y))$ (A7)
4. $\vdash_{\mathrm{PL1}} (u \in x \rightarrow u \in x) \rightarrow (x = y \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in y))$ (MP 2,3)
5. $\vdash_{\mathrm{PL1}} x = y \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in y)$ (MP 1,4)
6. $\vdash_{\mathrm{PL1}} \forall u\,(x = y \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in y))$ (G, 5)
7. $\vdash_{\mathrm{PL1}} \forall u\,(x = y \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in y)) \rightarrow (x = y \rightarrow \forall x\,(u \in x \rightarrow u \in y))$ (A5)
8. $\vdash_{\mathrm{PL1}} x = y \rightarrow \forall x\,(u \in x \rightarrow u \in y)$ (MP 6,7)
9. $\vdash_{\mathrm{PL1}} \forall y\,(x = y \rightarrow \forall x\,(u \in x \rightarrow u \in y))$ (G, 8)
10. $\vdash_{\mathrm{PL1}} \forall x\,\forall y\,(x = y \rightarrow \forall x\,(u \in x \rightarrow u \in y))$ (G, 9)

Lösung zu Aufgabe 3.8

$$\begin{aligned}
\neg\forall\,(u \in x)\,\varphi &\underset{(3.28)}{\equiv} \neg\forall u\,(u \in x \rightarrow \varphi)\\
&\underset{(3.8)}{\equiv} \exists u\,\neg(u \in x \rightarrow \varphi)\\
&\equiv \exists u\,(u \in x \wedge \neg\varphi)\\
&\underset{(3.29)}{\equiv} \exists\,(u \in x)\,\neg\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\neg\exists\,(u \in x)\,\varphi &\equiv \neg\exists\,(u \in x)\,\neg(\neg\varphi)\\
&\underset{(3.57)}{\equiv} \neg\neg\forall\,(u \in x)\,\neg\varphi\\
&\equiv \forall\,(u \in x)\,\neg\varphi
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3.9

a)

$$\begin{aligned}
\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ (\varphi \vee \psi) &\underset{(3.28)}{\equiv} \forall\,\mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \to (\varphi \vee \psi)) \\
&\equiv \forall\,\mathsf{u}\ (\mathsf{u} \notin \mathsf{x} \vee (\varphi \vee \psi)) \\
&\equiv \forall\,\mathsf{u}\ (\varphi \vee (\mathsf{u} \notin \mathsf{x} \vee \psi)) \\
&\underset{(3.19)}{\equiv} \varphi \vee \forall\,\mathsf{u}\ (\mathsf{u} \notin \mathsf{x} \vee \psi) \\
&\equiv \varphi \vee \forall\,\mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \to \psi) \\
&\underset{(3.28)}{\equiv} \varphi \vee \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ (\varphi \to \psi) &\equiv \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ (\neg\varphi \vee \psi) \\
&\underset{(3.59)}{\equiv} \neg\varphi \vee \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \psi \\
&\equiv \varphi \to \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exists\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ (\varphi \wedge \psi) &\underset{(3.29)}{\equiv} \exists\,\mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \wedge (\varphi \wedge \psi)) \\
&\equiv \exists\,\mathsf{u}\ (\varphi \wedge (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \wedge \psi)) \\
&\underset{(3.21)}{\equiv} \varphi \wedge \exists\,\mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \wedge \psi) \\
&\underset{(3.29)}{\equiv} \varphi \wedge \exists\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \psi
\end{aligned}$$

b) 1. Es sei $\varphi = \mathsf{0}$ und (U, I) eine Interpretation mit $I(\mathsf{x}) = \emptyset$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&(U, I) \models \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ (\varphi \wedge \psi), \text{ aber} \\
&(U, I) \not\models \varphi \wedge \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \psi
\end{aligned}$$

2. Es sei $\varphi = \mathsf{1}$ und (U, I) eine Interpretation mit $I(\mathsf{x}) = \emptyset$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&(U, I) \not\models \exists\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ (\varphi \vee \psi), \text{ aber} \\
&(U, I) \models \varphi \vee \exists\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \psi
\end{aligned}$$

3. Es sei $\varphi = \mathsf{0}$ und (U, I) eine Interpretation mit $I(\mathsf{x}) = \emptyset$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&(U, I) \not\models \exists\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ (\varphi \to \psi), \text{ aber} \\
&(U, I) \models \varphi \to \exists\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \psi
\end{aligned}$$

c) Aus der Voraussetzung $I(\mathsf{x}) \neq \emptyset$ folgt:

$$(U, I) \models \forall\,\mathsf{u}\ \mathsf{u} \notin \mathsf{x} \leftrightarrow \mathsf{0} \tag{3.5}$$

$$(U, I) \models \exists\,\mathsf{u}\ \mathsf{u} \in \mathsf{x} \leftrightarrow \mathsf{1} \tag{3.6}$$

Daraus können wir schließen:

$$\begin{aligned}
(U, I) \models \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ (\varphi \wedge \psi) &\underset{(3.28)}{\Leftrightarrow} (U, I) \models \forall\,\mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \to (\varphi \wedge \psi)) \\
&\Leftrightarrow (U, I) \models \forall\,\mathsf{u}\ (\mathsf{u} \notin \mathsf{x} \vee (\varphi \wedge \psi))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (U,I) \models \forall\, \mathsf{u}\ ((\mathsf{u} \notin \mathsf{x} \vee \varphi) \wedge (\mathsf{u} \notin \mathsf{x} \vee \psi)) \\
(3.55)\ &\Leftrightarrow (U,I) \models \forall\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \notin \mathsf{x} \vee \varphi) \wedge \forall\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \notin \mathsf{x} \vee \psi) \\
(3.19)\ &\Leftrightarrow (U,I) \models (\varphi \vee \forall\, \mathsf{u}\ \mathsf{u} \notin \mathsf{x}) \wedge \forall\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \notin \mathsf{x} \vee \psi) \\
(3.5)\ &\Leftrightarrow (U,I) \models (\varphi \vee \mathsf{0}) \wedge \forall\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \notin \mathsf{x} \vee \psi) \\
&\Leftrightarrow (U,I) \models (\varphi \vee \mathsf{0}) \wedge \forall\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \to \psi) \\
(3.28)\ &\Leftrightarrow (U,I) \models \varphi \wedge \forall\, (\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \psi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(U,I) \models \exists\, (\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ (\varphi \vee \psi)\ &\Leftrightarrow (U,I) \models \exists\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \wedge (\varphi \vee \psi)) \\
&\Leftrightarrow (U,I) \models \exists\, \mathsf{u}\ ((\mathsf{u} \in \mathsf{x} \wedge \varphi) \vee (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \wedge \psi)) \\
(3.56)\ &\Leftrightarrow (U,I) \models \exists\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \wedge \varphi) \vee \exists\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \wedge \psi) \\
(3.21)\ &\Leftrightarrow (U,I) \models (\varphi \wedge \exists\, \mathsf{u}\ \mathsf{u} \in \mathsf{x}) \vee \exists\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \wedge \psi) \\
(3.6)\ &\Leftrightarrow (U,I) \models (\varphi \wedge \mathsf{1}) \vee \exists\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \wedge \psi) \\
(3.29)\ &\Leftrightarrow (U,I) \models \varphi \vee \exists\, (\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \psi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(U,I) \models \exists\, (\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ (\varphi \to \psi) &\Leftrightarrow (U,I) \models \exists\, (\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ (\neg\varphi \vee \psi) \\
&\Leftrightarrow (U,I) \models \neg\varphi \vee \exists\, (\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \psi \\
&\Leftrightarrow (U,I) \models \varphi \to \exists\, (\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \psi
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 3.10

$$
\begin{aligned}
\mathsf{x} \cap \mathsf{y} \subseteq \mathsf{z} &:= \forall\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \wedge \mathsf{u} \in \mathsf{y} \to \mathsf{u} \in \mathsf{z}) \\
\mathsf{x} \cup \mathsf{y} \subseteq \mathsf{z} &:= \forall\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in \mathsf{x} \vee \mathsf{u} \in \mathsf{y} \to \mathsf{u} \in \mathsf{z})
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 3.11

a) Die Eigenschaft einer Menge, keine Elemente zu enthalten, kann durch die Formel

$$\forall\, \mathsf{v}\ \mathsf{v} \notin \mathsf{y}$$

beschrieben werden, die wiederum eine Abkürzung für

$$\forall\, \mathsf{v}\ \neg(\mathsf{v} \in \mathsf{y})$$

ist. Damit können wir das Unendlichkeitsaxiom in die folgende Form bringen:

$$\exists\, \mathsf{x}\ \exists\, \mathsf{y}\ (\forall\, \mathsf{v}\ \neg(\mathsf{v} \in \mathsf{y}) \wedge \mathsf{y} \in \mathsf{x} \wedge \forall\, (\mathsf{u} \in \mathsf{x})\ \mathsf{u} \cup \{\mathsf{u}\} \in \mathsf{x})$$

Der Ausdruck $\mathsf{u} \cup \{\mathsf{u}\} \in \mathsf{x}$ lässt sich folgendermaßen ersetzen:

$$\mathsf{u} \cup \{\mathsf{u}\} \in \mathsf{x} \;:=\; \exists\,(\mathsf{v} \in \mathsf{x})\; \forall \mathsf{w}\; (\mathsf{w} \in \mathsf{v} \leftrightarrow \mathsf{w} \in \mathsf{u} \vee \mathsf{w} = \mathsf{u})$$

b) Die folgende Formel erfüllt diesen Zweck:

$$\forall\,(\mathsf{v} \in \mathsf{y})\; \mathsf{v} \neq \mathsf{v}$$

Da $\mathsf{v} \neq \mathsf{v}$ unerfüllbar ist, ist die Formel genau dann wahr, wenn y als die leere Menge interpretiert wird.

Lösung zu Aufgabe 3.12

a) Auf den ersten Blick sieht die Formel wie eine Π_1-Formel aus, da einer Δ_0 ein unbeschränkter Allquantor vorangestellt ist. Dass der Schein trügt, zeigt Teil b). Die Formel ist zu einer Δ_0-Formel äquivalent und damit selbst eine Δ_0-Formel.

b)

$$\begin{aligned}
\forall \mathsf{v}\; (\exists\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\; \mathsf{v} \in \mathsf{u} \rightarrow \mathsf{v} \in \mathsf{y}) &\equiv \forall \mathsf{v}\; (\neg \exists\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\; \mathsf{v} \in \mathsf{u} \vee \mathsf{v} \in \mathsf{y}) \\
&\underset{(3.58)}{\equiv} \forall \mathsf{v}\; (\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\; \mathsf{v} \notin \mathsf{u} \vee \mathsf{v} \in \mathsf{y}) \\
&\underset{(3.59)}{\equiv} \forall \mathsf{v}\; \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\; (\mathsf{v} \notin \mathsf{u} \vee \mathsf{v} \in \mathsf{y}) \\
&\equiv \forall \mathsf{v}\; \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\; (\mathsf{v} \in \mathsf{u} \rightarrow \mathsf{v} \in \mathsf{y}) \\
&\equiv \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\; \forall \mathsf{v}\; (\mathsf{v} \in \mathsf{u} \rightarrow \mathsf{v} \in \mathsf{y}) \\
&\underset{(3.28)}{\equiv} \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\; \forall\,(\mathsf{v} \in \mathsf{u})\; \mathsf{v} \in \mathsf{y}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3.13

a)

$$\mathfrak{Set}(\mathsf{x}, \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n) \;:=\; \bigwedge_{i=1}^{n} (\mathsf{a}_i \in \mathsf{x}) \wedge \forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\; \bigvee_{i=1}^{n} (\mathsf{u} = \mathsf{a}_i)$$

b) Die Formel muss mit dem folgenden Ausdruck konjunktiv verknüpft werden:

$$\exists\,(\mathsf{a}_1 \in \mathsf{x})\; \ldots \exists\,(\mathsf{a}_n \in \mathsf{x})\; \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^{n} (\mathsf{a}_i \neq \mathsf{a}_j)$$

Der Ausdruck besagt, dass die Menge x mindestens n verschiedene Elemente enthält.

Lösung zu Aufgabe 3.14

$$
\begin{aligned}
(x = \langle a, b\rangle) &= \mathfrak{Pair}(x, a, b) \\
&= \exists\,(v \in x)\ \exists\,(w \in x)\ (\mathfrak{Set}(v, a) \wedge \mathfrak{Set}(w, a, b) \wedge \mathfrak{Set}(x, v, w)) \\
&= \exists\,(v \in x)\ \exists\,(w \in x)\ (\ (a \in v \wedge \forall\,(u \in v)\ u = a) \wedge \\
&\qquad\qquad (a \in w \wedge b \in w \wedge \forall\,(u \in w)\ (u = a \vee u = b)) \wedge \\
&\qquad\qquad (v \in x \wedge w \in x \wedge \forall\,(u \in x)\ (u = v \vee u = w))\ ) \\
&= \exists\, v\ (v \in x \wedge \exists\, w\ (w \in x \wedge (\\
&\quad (a \in v \wedge \forall\, u\ (u \in v \to u = a)) \wedge \\
&\quad (a \in w \wedge b \in w \wedge \forall\, u\ (u \in w \to (u = a \vee u = b))) \wedge \\
&\quad (v \in x \wedge w \in x \wedge \forall\, u\ (u \in x \to (u = v \vee u = w)))\ )\ )\ )
\end{aligned}
$$

Zu guter letzt müssten wir noch den Operator ‚$\wedge$‘ entfernen und mithilfe von ‚$\neg$‘ und ‚$\to$‘ ausdrücken. Wir wollen auf diesen Schritt verzichten, da wir den Zweck dieser Aufgabe bereits erreicht haben. Dieser Bestand darin, die Notwendigkeit der eingeführten Sprachkonstrukte zu verdeutlichen. Ohne die Meta-Konstrukte wären viele Formeln so komplex, dass sie sich einer intuitiven Interpretation entzögen.

Lösung zu Aufgabe 3.15

a) In $\mathfrak{Linkstotal}(r, x)$ ist der Bildbereich von r unspezifiziert und in $\mathfrak{Rechtstotal}(r, y)$ der Definitionsbereich.

b) Auch wenn die Formeln aufgrund ihrer syntaktischen Struktur nicht wie Σ_0-Formeln aussehen, sind sie dennoch welche. Sie sind zu den folgenden Σ_0-Formeln äquivalent:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Linkstotal}(r, x) &:= \forall\,(a \in x)\ \exists\,(\langle u, v\rangle \in r)\ a = u \\
\mathfrak{Rechtstotal}(r, y) &:= \forall\,(b \in y)\ \exists\,(\langle u, v\rangle \in r)\ b = v
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 3.16

Nein. Die vermeintlich fehlenden Forderungen werden durch das Fundierungsaxiom sichergestellt. Dieses Axiom unterbindet, dass eine Menge sich selbst enthalten kann oder sich zwei Mengen gegenseitig enthalten können. Das bedeutet, dass die $\in$-Relation irreflexiv und asymmetrisch sein muss. Ferner verhindert das Fundierungsaxiom, dass eine Menge eine unendlich absteigende $\in$-Kette enthalten kann, und dies wiederum bedeutet, dass jede nichtleere Teilmenge ein $\in$-minimales Element enthält.

Kurzum: Ist das Fundierungsaxiom vorhanden, so reicht es aus, ‚$\in$' als eine vollständige und transitive Relation zu charakterisieren. Die Relation muss dann automatisch auch eine Wohlordnung sein.

Lösung zu Aufgabe 3.17

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{Ord}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \neg\exists\, u\ \mathfrak{Succ}\mathfrak{Ord}(x, u)\\
&\equiv \mathfrak{Ord}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \neg\exists\, u\ (\mathfrak{Ord}(x) \wedge u \in x \wedge \forall\, (v \in x)\ (v = u \vee v \in u))\\
&\equiv \mathfrak{Ord}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \forall\, u\ (\neg\mathfrak{Ord}(x) \vee u \notin x \vee \exists\, (v \in x)\ (v \neq u \wedge v \notin u))\\
&\equiv \mathfrak{Ord}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \forall\, u\ (u \in x \rightarrow (\mathfrak{Ord}(x) \rightarrow \exists\, (v \in x)\ (v \neq u \wedge v \notin u)))\\
&\equiv \mathfrak{Ord}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \forall\, (u \in x)\ (\mathfrak{Ord}(x) \rightarrow \exists\, (v \in x)\ (v \neq u \wedge v \notin u))\\
&\equiv \mathfrak{Ord}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \forall\, (u \in x)\ \exists\, (v \in x)\ (v \neq u \wedge v \notin u)\\
&\equiv \mathfrak{Ord}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \forall\, (u \in x)\ \exists\, (v \in x)\ u \in v
\end{aligned}
$$

Im vorletzten Umformungsschritt haben wir den Ausdruck $\mathfrak{Ord}(x)$ entfernt, da die Eigenschaft von x, eine Ordinalzahl zu sein, bereits durch die ganz links stehende Teilformel sichergestellt wird. Im letzten Umformungsschritt haben wir die Trichotomie der Ordinalzahlen genutzt, die uns den Ausdruck $v \neq u \wedge v \notin u$ durch den äquivalenten Ausdruck $u \in v$ ersetzen lässt. Das Ergebnis ist die auf Seite 159 angegebene Formel (3.42).

Lösung zu Aufgabe 3.18

a) 1. Aufgrund der Trichotomie-Eigenschaft (2.155) sind die Aussagen $x \not\preceq u$ und $u \prec x$ äquivalent. Hieraus folgt die Äquivalenz von (3.65) und (3.66).

   2. Für alle Ordinalzahlen x gilt: Aus $u \in x$ folgt $u \preceq x$. Somit ist die Aussage $u \prec x$ äquivalent zu $u \not\simeq x$. Hieraus folgt die Äquivalenz von (3.65) und (3.67).

   3. Formel (3.68) ist lediglich eine aussagenlogische Umformulierung von (3.65). Damit sind beide Formeln äquivalent.

b) Nein! Die übersichtliche Art und Weise, in der die Formel niedergeschrieben sind, verdeckt, dass sich darin ein unbeschränkter Quantor verbirgt. Beispielsweise sieht die zweite Formel ausgeschrieben so aus:

$$\mathfrak{Ord}(x) \wedge \forall\, (u \in x)\ \neg\exists\, f\ \mathfrak{Bijektion}(f, u, x)$$

Lösung zu Aufgabe 3.19

Nein. Um dies einzusehen, schreiben wir im Klartext auf, was die Beziehung

$$\mathcal{M} \models \forall \mathsf{v}\ (\mathsf{v} \in y \to \mathsf{v} \in \mathbb{N}) \tag{3.7}$$

bedeutet:

„Jedes Element $v \in \mathcal{M}$, das in y enthalten ist, ist eine natürliche Zahl." (3.8)

Dies ist aber etwas anderes als die behauptete Aussage:

„Jedes Element v, das in y enthalten ist, ist eine natürliche Zahl." (3.9)

Die Transitivität von $\mathcal{M}$ stellt sicher, dass jedes Element von y auch ein Element von $\mathcal{M}$ ist, sodass aus (3.8) tatsächlich (3.9) folgt.

Streichen wir die Forderung der Transitivität, so wäre die Formel auch für jede Menge y wahr, die aus einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ durch die Hinzunahme eines fremden Elements entsteht, das nicht selbst in $\mathcal{M}$ enthalten ist. Dann wäre die Beziehung (3.7) immer noch erfüllt, obwohl y mindestens ein Element enthält, das keine natürliche Zahl ist.

Lösung zu Aufgabe 3.20

Wir haben uns auf die Voraussetzung geeinigt, ZFC habe ein abzählbares transitives Standardmodell $\mathcal{M}$. In diesem Modell sind alle Mengen abzählbar und damit insbesondere auch diejenigen Mengen, die die Rolle der $\aleph$-Zahlen übernehmen. Mit der Ausnahme von $\aleph_0$ sind alle „echten" $\aleph$-Zahlen überabzählbar und daher nicht in $\mathcal{M}$ enthalten. Also ist $\aleph_\alpha^{\mathcal{M}} \neq \aleph_\alpha$ für $\alpha > 0$.

4 Boolesche Algebren

Lösung zu Aufgabe 4.1

1. Beweis von (4.175)

$$
\begin{aligned}
0 \wedge a = 0 \text{ und } 0 \vee a = 1 &\underset{(4.4)}{\Rightarrow} a \vee 0 = 1 \\
&\underset{(4.15)}{\Rightarrow} a = 1 \\
a = 1 &\underset{(4.14)}{\Rightarrow} 0 \wedge a = 0 \\
&\underset{(4.23)}{\Rightarrow} 0 \wedge a = 0 \text{ und } 0 \vee a = 1
\end{aligned}
$$

2. Beweis von (4.176)

$$
\begin{aligned}
1 \wedge a = 0 \text{ und } 1 \vee a = 1 &\underset{(4.3)}{\Rightarrow} a \wedge 1 = 0 \\
&\underset{(4.14)}{\Rightarrow} a = 0 \\
a = 0 &\underset{(4.22)}{\Rightarrow} 1 \wedge a = 0 \\
&\underset{(4.15)}{\Rightarrow} 1 \wedge a = 0 \text{ und } 1 \vee a = 1
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 4.2

a)

$$
\begin{aligned}
a \wedge (\neg a \vee b) &\underset{(4.18)}{=} (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) \\
&\underset{(4.27)}{=} 0 \vee (a \wedge b) \\
&\underset{(4.15)}{=} a \wedge b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg a \wedge (a \vee b) &\underset{(4.32)}{=} \neg a \wedge (\neg\neg a \vee b) \\
&\underset{(4.177)}{=} \neg a \wedge b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \vee (\neg a \wedge b) &\underset{(4.19)}{=} (a \vee \neg a) \wedge (a \vee b) \\
&\underset{(4.28)}{=} 1 \wedge (a \vee b) \\
&\underset{(4.14)}{=} a \vee b
\end{aligned}
$$

$$
\neg a \vee (a \wedge b) \underset{(4.32)}{=} \neg a \vee (\neg\neg a \wedge b)
$$

$$\begin{aligned} &\overset{(4.179)}{=} \neg a \vee b \\ a \wedge (a \to b) \ &\overset{(4.39)}{=} a \wedge (\neg a \vee b) \\ &\overset{(4.177)}{=} a \wedge b \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} a \wedge \neg b \ &\overset{(4.32)}{=} \neg\neg a \wedge \neg b \\ &\overset{(4.36)}{=} \neg(\neg a \vee b) \\ &\overset{(4.180)}{=} \neg(\neg a \vee (a \wedge b)) \end{aligned}$$

c) Die Richtung von links nach rechts ist trivial. Die Richtung von rechts nach links folgt sofort aus dem Gesetz der Doppelnegation:

$$\neg a = \neg b \Rightarrow \neg\neg a = \neg\neg b \ \overset{(4.32)}{\Rightarrow} \ a = b$$

Lösung zu Aufgabe 4.3

1. Wir zeigen: $a \wedge 0 = 0$ (4.1)

$$\begin{aligned} a \wedge 0 \ &\overset{(4.189)}{=} (a \wedge 0) \vee 0 \\ &\overset{(4.190)}{=} (a \wedge 0) \vee (a \wedge a') \\ &\overset{(4.186)}{=} a \wedge (0 \vee a') \\ &\overset{(4.189)}{=} a \wedge a' \\ &\overset{(4.190)}{=} 0 \end{aligned}$$

   Der Beweis des zweiten Eliminationsgesetzes erfolgt analog.

2. Wir zeigen: $a \wedge (a \vee b) = a$ (4.2)

$$\begin{aligned} a \wedge (a \vee b) \ &\overset{(4.189)}{=} (a \vee 0) \wedge (a \vee b) \\ &\overset{(4.187)}{=} a \vee (0 \wedge b) \\ &\overset{(4.1)}{=} a \vee 0 \\ &\overset{(4.189)}{=} a \end{aligned}$$

3. Wir zeigen: $a \vee (a \wedge b) = a$ (4.3)

   Analog zu (4.2)

4. Wir zeigen: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

(a) Wir zeigen: $(a \vee (b \vee c)) \wedge a = ((a \vee b) \vee c) \wedge a$ (4.4)

$$\begin{aligned}(a \vee (b \vee c)) \wedge a &\overset{(4.2)}{=} a \\ &\overset{(4.3)}{=} a \vee (a \wedge c) \\ &\overset{(4.2)}{=} (a \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge c) \\ &\overset{(4.186)}{=} a \wedge ((a \vee b) \vee c) \\ &\overset{(4.184)}{=} ((a \vee b) \vee c) \wedge a\end{aligned}$$

(b) Wir zeigen: $(a \vee (b \vee c)) \wedge \neg a = ((a \vee b) \vee c) \wedge \neg a$ (4.5)

$$\begin{aligned}(a \vee (b \vee c)) \wedge \neg a &\overset{(4.178)}{=} (b \vee c) \wedge \neg a \\ &\overset{(4.186)}{=} (b \wedge \neg a) \vee (c \wedge \neg a) \\ &\overset{(4.178)}{=} ((a \vee b) \wedge \neg a) \vee (c \wedge \neg a) \\ &\overset{(4.186)}{=} ((a \vee b) \vee c) \wedge \neg a\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}a \vee (b \vee c) &\overset{(4.188)}{=} (a \vee (b \vee c)) \wedge 1 \\ &\overset{(4.191)}{=} (a \vee (b \vee c)) \wedge (a \vee \neg a) \\ &\overset{(4.186)}{=} ((a \vee (b \vee c)) \wedge a) \vee ((a \vee (b \vee c)) \wedge \neg a) \\ &\overset{\substack{(4.4)\\(4.5)}}{=} (((a \vee b) \vee c) \wedge a) \vee (((a \vee b) \vee c) \wedge \neg a) \\ &\overset{(4.186)}{=} ((a \vee b) \vee c) \wedge (a \vee \neg a) \\ &\overset{(4.191)}{=} ((a \vee b) \vee c) \wedge 1 \\ &\overset{(4.188)}{=} (a \vee b) \vee c\end{aligned} \tag{4.6}$$

Der Beweis des zweiten Assoziativgesetzes erfolgt analog.

Lösung zu Aufgabe 4.4

a) Aus der Umformung

$$\begin{aligned}a \vee \neg a &\overset{(4.192)}{=} ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)) \vee ((\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \\ &= ((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b)) \vee ((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \\ &= ((b \wedge a) \vee (b \wedge \neg a)) \vee ((\neg b \wedge a) \vee (\neg b \wedge \neg a)) \\ &\overset{(4.192)}{=} b \vee \neg b\end{aligned}$$

folgt, dass $a \wedge \neg a$ für alle $a \in V$ das gleiche Element aus V ist, und dasselbe gilt für $a \vee \neg a$. Dies legitimiert die folgende Definition:

$$0 := a \wedge \neg a$$

$$1 := a \vee \neg a$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Elemente 0 und 1 neutrale Elemente sind:

$$\begin{aligned} a \wedge 1 = a \wedge (a \vee \neg a) &\underset{(4.5)}{=} a \\ a \vee 0 = a \vee (a \wedge \neg a) &\underset{(4.6)}{=} a \end{aligned}$$

b) Die zu zeigenden Beziehungen

$$\begin{aligned} a \wedge \neg a &= 0 \\ a \vee \neg a &= 1 \end{aligned}$$

haben wir bereits in Teil a) bewiesen.

Damit gelten in $(V, \wedge, \vee)$ auch die De Morgan'schen Regeln, da wir zu deren Beweis lediglich das Huntington-Axiom, nicht aber das noch ausstehende Distributivgesetz verwendet haben.

c) $(V, \wedge, \vee)$ ist distributiv.

1. Beweis von $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}$

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= ((a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)) \vee ((a \wedge c \wedge b) \vee (a \wedge c \wedge \neg b)) \\ &= (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \vee \mathrm{C}) \\ &= \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C} \end{aligned}$$

2. Beweis von $\neg(a \wedge (b \vee c)) = \mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}$

$$\begin{aligned} \neg a &= (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \\ &= (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \\ &= \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg(a \wedge (b \vee c)) &= \neg a \vee (\neg b \wedge \neg c) \\ &= \neg a \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge a) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg a) \\ &= \neg a \vee \mathrm{D} \vee \mathrm{H} \\ &= \mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H} \end{aligned}$$

3. Beweis von $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \vee (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}) = 1$

$$\begin{aligned} &(\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \vee (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}) \\ &= ((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee (\mathrm{C} \vee \mathrm{D})) \vee ((\mathrm{E} \vee \mathrm{F}) \vee (\mathrm{G} \vee \mathrm{H})) \\ &= ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)) \vee ((\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \\ &= a \vee \neg a \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. Beweis des Hilfstheorems: Aus $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0$ folgt $a \wedge (b \vee c) = 0$

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \Rightarrow\ & \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C} = 0 \\ \Rightarrow\ & 0 \vee (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}) = 1 \\ \Rightarrow\ & \mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H} = 1 \\ \Rightarrow\ & \neg(a \wedge (b \vee c)) = 1 \\ \Rightarrow\ & a \wedge (b \vee c) = 0\end{aligned}$$

5. Beweis von $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}) = 0$

   Zunächst halten wir fest, dass die Konjunktion zweier Terme A, B, C, ... immer gleich 0 ist, da in der Konjunktion dann immer mindestens ein komplementäres Variabkenpaar vorhanden ist, es ist also $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} = 0$, $\mathrm{A} \wedge \mathrm{C} = 0$ usw. Mit dem eben bewiesen Hilfslemma können wir damit die folgenden Beziehungen ableiten:

$$\begin{gathered}\mathrm{A} \wedge \mathrm{D} = 0, \mathrm{A} \wedge \mathrm{E} = 0 \Rightarrow \mathrm{A} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E}) = 0 \\ \mathrm{A} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E}) = 0, \mathrm{A} \wedge \mathrm{F} = 0 \Rightarrow \mathrm{A} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F}) = 0 \\ \mathrm{A} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F}) = 0, \mathrm{A} \wedge \mathrm{G} = 0 \Rightarrow \mathrm{A} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G}) = 0 \\ \mathrm{A} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G}) = 0, \mathrm{A} \wedge \mathrm{H} = 0 \Rightarrow \mathrm{A} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}) = 0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{B} \wedge \mathrm{D} = 0, \mathrm{B} \wedge \mathrm{E} = 0 \Rightarrow \mathrm{B} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E}) = 0 \\ \mathrm{B} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E}) = 0, \mathrm{B} \wedge \mathrm{F} = 0 \Rightarrow \mathrm{B} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F}) = 0 \\ \mathrm{B} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F}) = 0, \mathrm{B} \wedge \mathrm{G} = 0 \Rightarrow \mathrm{B} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G}) = 0 \\ \mathrm{B} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G}) = 0, \mathrm{B} \wedge \mathrm{H} = 0 \Rightarrow \mathrm{B} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}) = 0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{C} \wedge \mathrm{D} = 0, \mathrm{C} \wedge \mathrm{E} = 0 \Rightarrow \mathrm{C} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E}) = 0 \\ \mathrm{C} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E}) = 0, \mathrm{C} \wedge \mathrm{F} = 0 \Rightarrow \mathrm{C} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F}) = 0 \\ \mathrm{C} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F}) = 0, \mathrm{C} \wedge \mathrm{G} = 0 \Rightarrow \mathrm{C} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G}) = 0 \\ \mathrm{C} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G}) = 0, \mathrm{C} \wedge \mathrm{H} = 0 \Rightarrow \mathrm{C} \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}) = 0\end{gathered}$$

   Auf die drei Teilergebnissen, in denen jeweils die Formel $(\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H})$ vorkommt, können wir das Hilfslemma auf die gleiche Weise anwenden und erhalten dann:

$$(\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}) = 0$$

6. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

   Aus (4.10) und

$$\begin{gathered}(\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \vee (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}) = 1 \\ (\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \wedge (\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}) = 0\end{gathered}$$

folgt

$$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C} = \neg(\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H})$$

und daraus die Behauptung:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= \neg(\mathrm{D} \vee \mathrm{E} \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{G} \vee \mathrm{H}) \\ &= \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vee \mathrm{C} \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

d) Boolesche Algebren sind Verbände, die komplementär und distributiv sind. Alle drei Eigenschaften wurden in den vorherigen Teilaufgaben bewiesen.

Lösung zu Aufgabe 4.5

1. Beweis von (4.193)

$$\begin{aligned} a \to a &\underset{(4.39)}{=} \neg a \vee a \\ &\underset{(4.28)}{=} 1 \end{aligned}$$

2. Beweis von (4.194)

$$\begin{aligned} a \to \neg a &\underset{(4.39)}{=} \neg a \vee \neg a \\ &\underset{(4.8)}{=} \neg a \end{aligned}$$

3. Beweis von (4.195)

$$\begin{aligned} \neg a \to a &\underset{(4.39)}{=} \neg\neg a \vee a \\ &\underset{(4.32)}{=} a \vee a \\ &\underset{(4.8)}{=} a \end{aligned}$$

4. Beweis von (4.196)

$$\begin{aligned} a \to b &\underset{(4.39)}{=} \neg a \vee b \\ &\underset{(4.32)}{=} \neg\neg b \vee \neg a \\ &\underset{(4.39)}{=} \neg b \to \neg a \end{aligned}$$

5. Beweis von (4.197)

$$\begin{aligned} a \to (b \to c) &\underset{(4.39)}{=} \neg a \vee (\neg b \vee c) \\ &\underset{(4.2)}{=} (\neg a \vee \neg b) \vee c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{(4.4)}{=} (\neg b \vee \neg a) \vee c \\ &\overset{(4.2)}{=} \neg b \vee (\neg a \vee c) \\ &\overset{(4.39)}{=} b \to (a \to c) \end{aligned}$$

6. Beweis von (4.198)

$$\begin{aligned} a \to (b \to c) \ &\overset{(4.39)}{=} \neg a \vee (\neg b \vee c) \\ &\overset{(4.2)}{=} (\neg a \vee \neg b) \vee c \\ &\overset{(4.35)}{=} \neg(a \wedge b) \vee c \\ &\overset{(4.39)}{=} (a \wedge b) \to c \end{aligned}$$

7. Beweis von (4.199)

$$\begin{aligned} a \to (b \to c) \ &\overset{(4.39)}{=} \neg a \vee (\neg b \vee c) \\ &\overset{(4.180)}{=} \neg a \vee (\neg b \vee (c \wedge b)) \\ &\overset{(4.2)}{=} (\neg a \vee \neg b) \vee (c \wedge b) \\ &\overset{(4.35)}{=} \neg(a \wedge b) \vee (c \wedge b) \\ &\overset{(4.39)}{=} (a \wedge b) \to (c \wedge b) \end{aligned}$$

8. Beweis von (4.200)

$$\begin{aligned} a \to (b \to c) \ &\overset{(4.197)}{=} b \to (a \to c) \\ &\overset{(4.199)}{=} (b \wedge a) \to (c \wedge a) \end{aligned}$$

9. Beweis von (4.201)

$$\begin{aligned} a \to (b \to c) \ &\overset{(4.39)}{=} \neg a \vee (\neg b \vee c) \\ &\overset{(4.4)}{=} (\neg a \vee \neg b) \vee c \\ &\overset{(4.180)}{=} (a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee c \\ &\overset{(4.36)}{=} \neg(\neg a \vee b) \vee (\neg a \vee c) \\ &\overset{(4.39)}{=} \neg(a \to b) \vee (a \to c) \\ &\overset{(4.39)}{=} (a \to b) \to (a \to c) \end{aligned}$$

10. Beweis von (4.202)

$$\begin{aligned} a \to (b \to c) \ &\overset{(4.197)}{=} b \to (a \to c) \\ &\overset{(4.201)}{=} (b \to a) \to (b \to c) \end{aligned}$$

11. Beweis von (4.203)

$$a \to (b \wedge c) \ \overset{(4.39)}{=} \neg a \vee (b \wedge c)$$

$$\begin{aligned} &\overset{(4.19)}{=} (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \\ &\overset{(4.39)}{=} (a \to b) \wedge (a \to c) \end{aligned}$$

12. Beweis von (4.204)

$$\begin{aligned} a \wedge ((a \wedge b) \to (a \wedge c)) &\overset{(4.39)}{\underset{(4.35)}{=}} a \wedge ((\neg a \vee \neg b) \vee (a \wedge c)) \\ &\overset{(4.18)}{=} (a \wedge (\neg a \vee \neg b)) \vee (a \wedge a \wedge c) \\ &\overset{(4.178)}{\underset{(4.7)}{=}} (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c) \\ &\overset{(4.18)}{=} a \wedge (\neg b \vee c) \\ &\overset{(4.39)}{=} a \wedge (b \to c) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.6

1. Beweis von (4.205)

$$\begin{aligned} a \to (b \to a) &\overset{(4.39)}{=} \neg a \vee (\neg b \vee a) \\ &\overset{(4.4)}{\underset{(4.2)}{=}} (\neg a \vee a) \vee \neg b \\ &\overset{(4.28)}{=} 1 \vee \neg b \\ &\overset{(4.23)}{=} 1 \end{aligned}$$

2. Beweis von (4.206)

$$\begin{aligned} &(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \\ &\overset{(4.201)}{=} (a \to (b \to c)) \to (a \to (b \to c)) \\ &\overset{(4.193)}{=} 1 \end{aligned}$$

3. Beweis (4.207)

$$\begin{aligned} &(\neg a \to \neg b) \to (b \to a) \\ &\overset{(4.196)}{=} (b \to a) \to (b \to a) \\ &\overset{(4.193)}{=} 1 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.7

1. Beweis von (4.208)

$$\begin{aligned} a \leftrightarrow a &\overset{(4.40)}{=} a \to a \wedge a \to a \\ &\overset{(4.7)}{=} a \to a \end{aligned}$$

$$\overset{(4.193)}{=} 1$$

2. Beweis von (4.209)

$$\begin{aligned} a \not\leftrightarrow a &\overset{(4.41)}{=} \neg(a \leftrightarrow a) \\ &\overset{(4.208)}{=} \neg 1 \\ &\overset{(4.31)}{=} 0 \end{aligned}$$

3. Beweis von (4.210)

$$\begin{aligned} a \leftrightarrow b &\overset{(4.40)}{=} (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \\ &\overset{(4.39)}{=} (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a) \\ &\overset{(4.4)}{=} (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \end{aligned}$$

4. Beweis von (4.211)

$$\begin{aligned} a \leftrightarrow b &\overset{(4.210)}{=} (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \\ &\overset{(4.18)}{=} (\neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) \\ &\overset{(4.27)}{=} (\neg a \wedge \neg b) \vee 0 \vee 0 \vee (a \wedge b) \\ &\overset{(4.15)}{=} (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) \end{aligned}$$

5. Beweis von (4.212)

$$\begin{aligned} a \not\leftrightarrow b &\overset{(4.41)}{=} \neg(a \leftrightarrow b) \\ &\overset{(4.211)}{=} \neg((\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)) \\ &\overset{\substack{(4.35)\\(4.36)}}{=} (\neg\neg a \vee \neg\neg b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \\ &\overset{(4.32)}{=} (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \end{aligned}$$

6. Beweis von (4.213)

$$\begin{aligned} a \not\leftrightarrow b &\overset{(4.41)}{=} \neg(a \leftrightarrow b) \\ &\overset{(4.210)}{=} \neg((\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)) \\ &\overset{\substack{(4.35)\\(4.36)}}{=} (\neg\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg\neg b) \\ &\overset{(4.32)}{=} (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \\ &\overset{(4.4)}{=} (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \end{aligned}$$

7. Beweis von (4.214)

$$\begin{aligned} \neg a \leftrightarrow \neg b &\overset{(4.40)}{=} (\neg a \rightarrow \neg b) \wedge (\neg b \rightarrow \neg a) \\ &\overset{(4.196)}{=} (\neg\neg b \rightarrow \neg\neg a) \wedge (\neg\neg a \rightarrow \neg\neg b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{(4.32)}{\underset{(4.3)}{}} = (a \to b) \wedge (b \to a) \\ &\underset{(4.40)}{} = a \leftrightarrow b \end{aligned}$$

8. Beweis von (4.215)

$$\begin{aligned} \neg a \not\leftrightarrow \neg b \ &\underset{(4.41)}{} = \neg(\neg a \leftrightarrow \neg b) \\ &\underset{(4.214)}{} = \neg(a \leftrightarrow b) \\ &\underset{(4.41)}{} = a \not\leftrightarrow b \end{aligned}$$

9. Beweis von (4.216)

$$\begin{aligned} \neg a \leftrightarrow b \ &\underset{(4.210)}{} = (\neg\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \\ &\underset{(4.32)}{} = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \\ &\underset{(4.212)}{} = a \not\leftrightarrow b \end{aligned}$$

10. Beweis von (4.217)

$$\begin{aligned} \neg a \not\leftrightarrow b \ &\underset{(4.41)}{} = \neg(\neg a \leftrightarrow b) \\ &\underset{(4.216)}{} = \neg(a \not\leftrightarrow b) \\ &\underset{(4.41)}{} = \neg\neg(a \leftrightarrow b) \\ &\underset{(4.32)}{} = a \leftrightarrow b \end{aligned}$$

11. Beweis von (4.218)

$$\begin{aligned} &(a \wedge b) \not\leftrightarrow (a \wedge c) \\ &\underset{(4.210)}{} = (\neg(a \wedge b) \wedge (a \wedge c)) \vee ((a \wedge b) \wedge \neg(a \wedge c)) \\ &\underset{(4.35)}{} = ((\neg a \vee \neg b) \wedge (a \wedge c)) \vee ((a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg c)) \\ &\underset{(4.18)}{} = (\neg a \wedge a \wedge c) \vee (\neg b \wedge a \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \\ &\overset{(4.27)}{\underset{(4.22)}{}} = 0 \vee (\neg b \wedge a \wedge c) \vee 0 \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \\ &\underset{(4.15)}{} = (\neg b \wedge a \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \\ &\underset{(4.18)}{} = a \wedge ((\neg b \wedge c) \vee (b \wedge \neg c)) \\ &\underset{(4.213)}{} = a \wedge (b \not\leftrightarrow c) \end{aligned}$$

12. Beweis von (4.219)

$$\begin{aligned} a \vee (b \leftrightarrow c) \ &\underset{(4.214)}{} = a \vee (\neg b \leftrightarrow \neg c) \\ &\underset{(4.32)}{} = \neg\neg(a \vee (\neg b \leftrightarrow \neg c)) \\ &\underset{(4.36)}{} = \neg(\neg a \wedge \neg(\neg b \leftrightarrow \neg c)) \\ &\underset{(4.41)}{} = \neg(\neg a \wedge (\neg b \not\leftrightarrow \neg c)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(4.218)}{=} \neg((\neg a \wedge \neg b) \not\leftrightarrow (\neg a \wedge \neg c)) \\
&\overset{(4.41)}{=} (\neg a \wedge \neg b) \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg c) \\
&\overset{(4.36)}{=} \neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg(a \vee c) \\
&\overset{(4.214)}{=} (a \vee b) \leftrightarrow (a \vee c)
\end{aligned}
$$

13. Beweis von (4.220)

$$
\begin{aligned}
a \rightarrow (b \leftrightarrow c) \quad &\overset{(4.214)}{=} a \rightarrow (\neg b \leftrightarrow \neg c) \\
&\overset{(4.39)}{=} \neg a \vee (\neg b \leftrightarrow \neg c) \\
&\overset{(4.219)}{=} (\neg a \vee \neg b) \leftrightarrow (\neg a \vee \neg c) \\
&\overset{(4.35)}{=} \neg(a \wedge b) \leftrightarrow \neg(a \wedge c) \\
&\overset{(4.214)}{=} (a \wedge b) \leftrightarrow (a \wedge c)
\end{aligned}
$$

14. Beweis von (4.221)

$$
\begin{aligned}
&a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) \\
&\overset{(4.211)}{=} (\neg a \wedge \neg(b \leftrightarrow c)) \vee (a \wedge (b \leftrightarrow c)) \\
&\overset{(4.210)}{\overset{(4.211)}{=}} (\neg a \wedge \neg((\neg b \vee c) \wedge (b \vee \neg c))) \vee (a \wedge ((\neg b \wedge \neg c) \vee (b \wedge c))) \\
&\overset{(4.35)}{\overset{(4.32)}{=}} (\neg a \wedge ((b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge c))) \vee (a \wedge ((\neg b \wedge \neg c) \vee (b \wedge c))) \\
&\overset{(4.18)}{=} (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c) \\
&\overset{(4.18)}{=} (((\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)) \wedge c) \vee (((\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)) \wedge \neg c) \\
&\overset{(4.211)}{\overset{(4.213)}{=}} ((a \leftrightarrow b) \wedge c) \vee ((a \not\leftrightarrow b) \wedge \neg c) \\
&\overset{(4.41)}{=} ((a \leftrightarrow b) \wedge c) \vee (\neg(a \leftrightarrow b) \wedge \neg c) \\
&\overset{(4.211)}{=} (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c
\end{aligned}
$$

15. Beweis von (4.222)

$$
\begin{aligned}
a \not\leftrightarrow (b \not\leftrightarrow c) \quad &\overset{(4.216)}{=} \neg a \leftrightarrow (b \leftrightarrow \neg c) \\
&\overset{(4.221)}{=} (\neg a \leftrightarrow b) \leftrightarrow \neg c \\
&\overset{(4.216)}{=} (a \not\leftrightarrow b) \not\leftrightarrow c
\end{aligned}
$$

16. Beweis von (4.223)

$$
\begin{aligned}
a \not\leftrightarrow (b \not\leftrightarrow c) \quad &\overset{(4.222)}{=} (a \not\leftrightarrow b) \not\leftrightarrow c \\
&\overset{(4.41)}{=} \neg(a \leftrightarrow b) \not\leftrightarrow c \\
&\overset{(4.217)}{=} (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c \\
&\overset{(4.210)}{=} a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)
\end{aligned}
$$

17. Beweis von (4.224)

$$\begin{aligned}(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) &\underset{(4.221)}{=} ((a \leftrightarrow b) \leftrightarrow b) \leftrightarrow c\\ &\underset{(4.221)}{=} (a \leftrightarrow (b \leftrightarrow b)) \leftrightarrow c\\ &\underset{(4.208)}{=} (a \leftrightarrow 1) \leftrightarrow c\\ &\underset{(4.210)}{=} ((\neg a \vee 1) \wedge (a \vee 0)) \leftrightarrow c\\ &\underset{\substack{(4.15)\\(4.23)}}{=} a \leftrightarrow c\end{aligned}$$

18. Beweis von (4.225)

$$\begin{aligned}(a \not\leftrightarrow b) \not\leftrightarrow (b \not\leftrightarrow c) &\underset{(4.40)}{=} \neg((a \not\leftrightarrow b) \leftrightarrow b \not\leftrightarrow c))\\ &\underset{(4.217)}{=} \neg((a \leftrightarrow \neg b) \leftrightarrow (\neg b \leftrightarrow c))\\ &\underset{(4.223)}{=} \neg(a \leftrightarrow c)\\ &\underset{(4.41)}{=} a \not\leftrightarrow c\end{aligned}$$

19. Beweis von (4.226)

$$\begin{aligned}a \leftrightarrow 1 &\underset{(4.211)}{=} (\neg a \wedge \neg 1) \vee (a \wedge 1)\\ &\underset{\substack{(4.31)\\(4.14)}}{=} (\neg a \wedge 0) \vee a\\ &\underset{\substack{(4.22)\\(4.15)}}{=} a\end{aligned}$$

20. Beweis von (4.227)

$$\begin{aligned}a \not\leftrightarrow 0 &\underset{(4.216)}{=} a \leftrightarrow \neg 0\\ &\underset{(4.30)}{=} a \leftrightarrow 1\\ &\underset{(4.226)}{=} a\end{aligned}$$

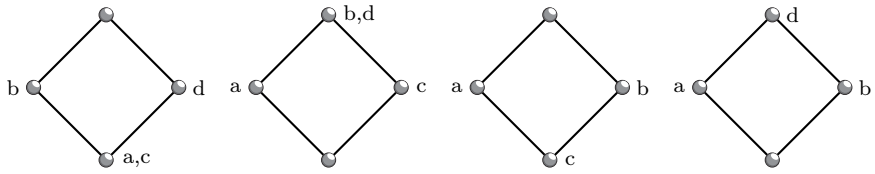
Lösung zu Aufgabe 4.8

Wir wählen einen beliebigen beschränkten Verband. Dort gilt:

$$1 \wedge 0 \leq 0 \wedge 0, \text{ aber } 1 \not\leq 0$$
$$1 \vee 1 \leq 0 \vee 1, \text{ aber } 1 \not\leq 0$$

Lösung zu Aufgabe 4.9

Die Beziehungen (4.228) bis (4.231) werden nacheinander durch die folgenden Gegenbeispiele widerlegt:



Lösung zu Aufgabe 4.10

a) 1. Beweis von (4.232)
Aus (4.59) und (4.60) folgt:

$$a \wedge c \leq c$$
$$b \wedge c \leq c$$
$$a \wedge c \leq a \leq a \vee b$$
$$b \wedge c \leq b \leq a \vee b$$

Aus den ersten und den letzten beiden Gleichungen folgen mit (4.56) die Beziehungen:

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq c$$
$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b)$$

Mit (4.55) ergibt dies:

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$$

2. Beweis von (4.233)
Gilt $a \leq c$, so ist $a \wedge c = a$ und die Behauptung folgt sofort aus (4.232).

b) Nein. Würde die erste Umkehrung gelten, so wäre jeder Verband distributiv, was er nicht ist. Würde die zweite Umkehrung gelten, so wäre jeder Verband nach dem Ergebnis, das Sie in Aufgabe 4.11 erarbeiten werden, modular, was ebenfalls nicht der Fall ist.

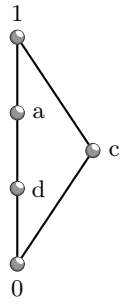
Lösung zu Aufgabe 4.11

a) Der linke und der rechte Verband sind modular. Der mittlere Verband ist nicht modular, denn es gilt:

$$d \leq a$$

$$d \vee (b \wedge a) = d \vee 0 = d$$
$$(d \vee b) \wedge a = 1 \wedge a = a$$

b) Ein Verband mit 5 Elementen, der nicht modular ist:



c) 1. Beweis von (4.235)

$$\begin{aligned} a \geq c &\Rightarrow c \leq a \\ &\overset{(4.234)}{\Rightarrow} c \vee (b \wedge a) = (c \vee b) \wedge a \\ &\Rightarrow (c \vee b) \wedge a = c \vee (b \wedge a) \\ &\overset{(4.3)}{\underset{(4.4)}{\Rightarrow}} a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c \end{aligned}$$

2. Beweis von (4.236) und (4.237)
Die Beziehungen ergeben sich sofort aus (4.234) und (4.235) und den Äquivalenzen:

$$a \leq c \Leftrightarrow a = a \wedge c$$
$$a \geq c \Leftrightarrow a = a \vee c$$

d) 1. Äquivalenz von (4.234) und (4.238)

(a) Aus $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ folgt: (4.7)

$$\begin{aligned} &\overset{(4.60)}{\Rightarrow} a \leq a \vee c \\ &\overset{(4.7)}{\Rightarrow} a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

(b) Aus $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ folgt: (4.8)

$$\begin{aligned} a \leq c \ &\overset{(4.44)}{\Rightarrow} a \vee c = c \\ &\overset{(4.8)}{\Rightarrow} a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

2. Äquivalenz von (4.235) und (4.239)
Der Beweis erfolgt analog.

d) Zeigen Sie, dass jede boolesche Algebra ein modularer Verband ist.

$$\begin{aligned} a \leq c \ &\underset{(4.42)}{\Rightarrow} a = a \wedge c \\ &\Rightarrow a \vee (b \wedge c) \ \underset{(4.9)}{=} \ (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \ \underset{(4.19)}{=} \ (a \vee b) \wedge c \end{aligned} \tag{4.9}$$

Lösung zu Aufgabe 4.12

1. Beweis von (4.240)

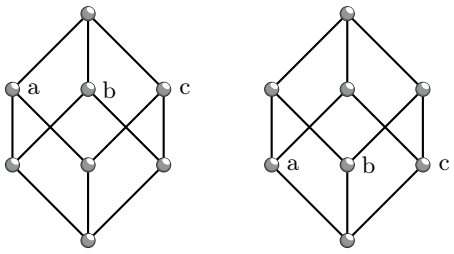
$$\begin{aligned} (a \to b) \wedge c \ &\underset{(4.39)}{=} (\neg a \vee b) \wedge c \\ &\underset{(4.18)}{=} (\neg a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\ &\underset{(4.46)}{\overset{(4.59)}{\leq}} \neg a \vee (b \wedge c) \\ &\underset{(4.39)}{=} a \to (b \wedge c) \end{aligned}$$

2. Beweis von (4.241)

$$\begin{aligned} (a \to b) \vee c \ &\underset{(4.39)}{=} (\neg a \vee b) \vee c \\ &\underset{(4.2)}{=} \neg a \vee (b \vee c) \\ &\underset{(4.39)}{=} a \to (b \vee c) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.13

a) 1. Der linke Verband widerlegt (4.242) und der rechte (4.243):



b) Ja, alle Behauptungen sind beispielsweise in der booleschen Algebra $(\{0,1\}, \wedge, \vee)$ erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 4.14

a)

$$\begin{aligned} a \wedge b = 1 &\Leftrightarrow 1 \leq a \wedge b \\ &\overset{(4.63)}{\Leftrightarrow} 1 \leq a \text{ und } 1 \leq b \\ &\Leftrightarrow a = 1 \text{ und } b = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \vee b = 0 &\Leftrightarrow 0 \geq a \vee b \\ &\overset{(4.64)}{\Leftrightarrow} 0 \geq a \text{ und } 0 \geq b \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ und } b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \leftrightarrow b = 1 &\overset{(4.40)}{\Leftrightarrow} a \to b \wedge b \to a = 1 \\ &\overset{(4.244)}{\Leftrightarrow} a \to b = 1 \text{ und } b \to a = 1 \\ &\overset{(4.54)}{\Leftrightarrow} a \leq b \text{ und } b \leq a \\ &\Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \wedge b \leq c &\overset{(4.54)}{\Leftrightarrow} a \wedge b \to c = 1 \\ &\overset{(4.198)}{\Leftrightarrow} a \to (b \to c) = 1 \\ &\overset{(4.54)}{\Leftrightarrow} a \leq (b \to c) \\ &\overset{(4.39)}{\Leftrightarrow} a \leq (\neg b \vee c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \geq \neg a \wedge b &\Leftrightarrow b \wedge \neg a \leq a \\ &\overset{(4.246)}{\Leftrightarrow} b \leq \neg\neg a \vee a = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \leq \neg a \vee b &\overset{(4.47)}{\Leftrightarrow} \neg a \geq \neg(\neg a \vee b) \\ &\overset{(4.36)}{\Leftrightarrow} \neg a \geq \neg\neg a \wedge \neg b \\ &\overset{(4.247)}{\Leftrightarrow} \neg a \geq \neg b \\ &\overset{(4.47)}{\Leftrightarrow} a \leq b \end{aligned}$$

b) Vorbemerkung. Es ist:

$$\begin{aligned} &((a_1 \to b_1) \wedge (a_2 \to b_2)) \to (\varphi \to \psi) \\ &= \neg((a_1 \to b_1) \wedge (a_2 \to b_2)) \vee (\varphi \to \psi) \\ &= \neg(a_1 \to b_1) \vee \neg(a_2 \to b_2) \vee \neg\varphi \vee \psi \\ &= (a_1 \wedge \neg b_1) \vee (a_2 \wedge \neg b_2) \vee \neg\varphi \vee \psi \end{aligned} \tag{4.10}$$

1. Beweis von (4.248)

$$\begin{aligned} &((a_1 \to b_1) \wedge (a_2 \to b_2)) \to ((a_1 \wedge a_2) \to (b_1 \wedge b_2)) \\ &\overset{(4.10)}{=} (a_1 \wedge \neg b_1) \vee (a_2 \wedge \neg b_2) \vee \neg(a_1 \wedge a_2) \vee (b_1 \wedge b_2) \\ &= (a_1 \wedge \neg b_1) \vee (a_2 \wedge \neg b_2) \vee \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee (b_1 \wedge b_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \neg b_1 \vee \neg b_2 \vee \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee (b_1 \wedge b_2) \\
&= \neg(b_1 \wedge b_2) \vee \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee (b_1 \wedge b_2) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Aus (4.54) folgt die Behauptung.

2. Beweis von (4.249)
   Aus (4.248) folgt:

$$
\begin{aligned}
(a_1 \to b_1) \wedge (a_2 \to b_2) &\leq (a_1 \wedge a_2) \to (b_1 \wedge b_2) \\
(b_1 \to a_1) \wedge (b_2 \to a_2) &\leq (b_1 \wedge b_2) \to (a_1 \wedge a_2)
\end{aligned}
$$

   Dann folgt die Behauptung aus (4.55) und der Beziehung

$$(a \to b) \wedge (b \to a) = a \leftrightarrow b$$

3. Beweis von (4.250)

$$
\begin{aligned}
&((a_1 \to b_1) \wedge (a_2 \to b_2)) \to ((a_1 \vee a_2) \to (b_1 \vee b_2)) \\
\overset{(4.10)}{=}\ &(a_1 \wedge \neg b_1) \vee (a_2 \wedge \neg b_2) \vee \neg(a_1 \vee a_2) \vee (b_1 \vee b_2) \\
&= (a_1 \wedge \neg b_1) \vee (a_2 \wedge \neg b_2) \vee (\neg a_1 \wedge \neg a_2) \vee b_1 \vee b_2 \\
&= a_1 \vee a_2 \vee (\neg a_1 \wedge \neg a_2) \vee b_1 \vee b_2 \\
&= a_1 \vee a_2 \vee \neg(a_1 \vee a_2) \vee b_1 \vee b_2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

   Aus (4.54) folgt die Behauptung.

4. Beweis von (4.251)
   Aus (4.250) folgt:

$$
\begin{aligned}
(a_1 \to b_1) \wedge (a_2 \to b_2) &\leq (a_1 \vee a_2) \to (b_1 \vee b_2) \\
(b_1 \to a_1) \wedge (b_2 \to a_2) &\leq (b_1 \vee b_2) \to (a_1 \vee a_2)
\end{aligned}
$$

   Dann folgt die Behauptung aus (4.55) und der Beziehung

$$(a \to b) \wedge (b \to a) = a \leftrightarrow b$$

5. Beweis von (4.252)

$$
\begin{aligned}
&\overset{(4.249)}{\Rightarrow} (a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2) \leq (a_1 \wedge a_2) \leftrightarrow (b_1 \wedge b_2) \\
&\overset{(4.47)}{\Rightarrow} \neg((a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2)) \geq \neg((a_1 \wedge a_2) \leftrightarrow (b_1 \wedge b_2)) \\
&\Rightarrow (a_1 \not\leftrightarrow b_1) \vee (a_2 \not\leftrightarrow b_2) \geq (a_1 \wedge a_2) \not\leftrightarrow (b_1 \wedge b_2)
\end{aligned}
$$

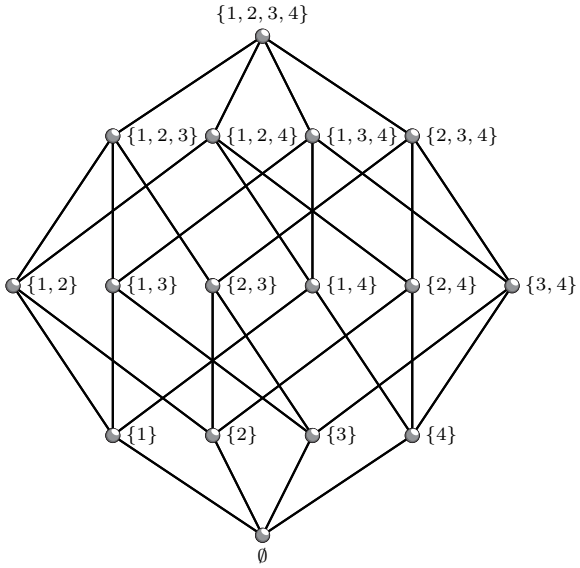
6. Beweis von (4.253)

$$\overset{(4.251)}{\Rightarrow} (a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2) \leq (a_1 \vee a_2) \leftrightarrow (b_1 \vee b_2)$$

$$\begin{aligned} &\overset{(4.47)}{\Rightarrow} \neg((a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2)) \geq \neg((a_1 \vee a_2) \leftrightarrow (b_1 \vee b_2)) \\ &\Rightarrow (a_1 \not\leftrightarrow b_1) \vee (a_2 \not\leftrightarrow b_2) \geq (a_1 \vee a_2) \not\leftrightarrow (b_1 \vee b_2) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.15

a) Die Potenzmengenalgebra $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ hat die folgende Struktur:



b) Jede Bitfolge der Länge n lässt sich als jene Teilmenge der Menge $\{1,\ldots,n\}$ auffassen, die genau dann die natürliche Zahl k enthält, wenn die Bitfolge an der k-ten Position gleich 1 ist. Damit entpuppt sich die Bitvektoralgebra als isomorph zu der Potenzmengenalgebra

$$(\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\}), \cap, \cup).$$

Die gleiche Argumentation belegt die Isomorphie zwischen der Bitfolgenalgebra und der Potenzmengenalgebra

$$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup).$$

Lösung zu Aufgabe 4.16

Zunächst halten wir fest, dass die gewählten Verknüpfungen kommutativ und distributiv sind. Ferner sind die Verknüpfungen ggT und kgV auf den genannten Zahlenmengen abgeschlossen, und es existieren jeweils zwei neutrale Elemente. In jeder der drei Zahlenmengen ist die die jeweils größte Zahl das neutrale Element bez. ggT und die 1 das neutrale Element bez. kgV. Es bleibt die Existenz von inversen Elementen zu überprüfen.

a) Für die Menge $\{1, 2, 3, 6\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(1,6) &= \mathrm{ggT}(6,1) = 1 \\ \mathrm{kgV}(1,6) &= \mathrm{kgV}(6,1) = 6 \\ \mathrm{ggT}(2,3) &= \mathrm{ggT}(3,2) = 1 \\ \mathrm{kgV}(2,3) &= \mathrm{kgV}(3,2) = 6 \end{aligned}$$

Somit sind die Zahlen 1 und 6 zueinander invers, genauso wie die Zahlen 2 und 3. Fazit: Das Tripel ist eine boolesche Algebra.

a) Für die Menge $\{1, 3, 4, 12\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(1,12) &= \mathrm{ggT}(12,1) = 1 \\ \mathrm{kgV}(1,12) &= \mathrm{kgV}(12,1) = 12 \\ \mathrm{ggT}(3,4) &= \mathrm{ggT}(4,3) = 1 \\ \mathrm{kgV}(3,4) &= \mathrm{kgV}(4,3) = 12 \end{aligned}$$

Somit sind die Zahlen 1 und 12 zueinander invers, genauso wie die Zahlen 3 und 4. Fazit: Das Tripel ist eine boolesche Algebra.

c) Für die Menge $\{1, 2, 4, 8\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(2,1) &= 1 \\ \mathrm{kgV}(2,1) &= 2 \neq 8 \\ \mathrm{ggT}(2,2) &= 2 \neq 1 \\ \mathrm{kgV}(2,2) &= 2 \neq 8 \\ \mathrm{ggT}(2,4) &= 2 \neq 1 \\ \mathrm{kgV}(2,4) &= 4 \neq 8 \\ \mathrm{ggT}(2,8) &= 2 \neq 1 \\ \mathrm{kgV}(2,8) &= 8 \end{aligned}$$

Die Rechnung zeigt, dass die Zahl 2 kein inverses Element besitzt (genauso wenig wie die Zahl 4). Somit ist das betrachtete Tripel keine boolesche Algebra.

c) In den ersten beiden Beispielen hat die Konstruktion funktioniert, da die beteiligten Zahlen keine gemeinsamen Primfaktoren aufwiesen. Die Konsequenzen daraus werden klar, wenn wir die Zahlen als die Mengen ihrer Primfaktoren niederschreiben, wobei mir Mehrfachnennungen erlauben. Die betrachteten Mengen sind dann sogenannte Multimengen, und die Zahl 12 hat beispielsweise die Darstellung $\{2, 2, 3\}$. Tun wir dies, so entspricht die ggT-Operation dem Mengenschnitt und die kgV-Operation der Mengenvereinigung. Damit ist klar: Die betrachteten booleschen Algebren sind nichts anderen als verklausulierte Mengenalgebren.

Für die Menge $\{1, 2, 4, 8\}$ gilt das Gesagte nicht mehr. Die Zahl 4 hat die Multimengendarstellung $\{2, 2\}$ und die Zahl 8 die Darstellung $\{2, 2, 2\}$. Somit ist

$$2 \cup 4 = \{2\} \cup \{2, 2\} = \{2, 2, 2\} = 8,$$

aber $\mathrm{kgV}(2, 4) = 4$. Mit anderen Worten: Die kgV-Operation ist von der Multimengenvereinigung verschieden. Berechnen wir den kgV für Zahlen wie in unserem Beispiel, also Zahlen, die gemeinsame Primfaktoren aufweisen, so ist das Ergebnis immer kleiner als das Einselement, da gemeinsame Faktoren herausgekürzt werden. In der Konsequenz führt dies dazu, dass nicht mehr für alle Zahlen in der Grundmenge ein inverses Element gefunden werden kann.

Lösung zu Aufgabe 4.17

a) Die Atome von $(B, \wedge, \vee)$ sind die Bitfolgen, die an einer einzigen Stelle eine 1 enthalten.

b) Nein. Eine solche Kette ist beispielsweise die folgende:

$$\texttt{11111...} > \texttt{01111...} > \texttt{00111...} > \texttt{00011...} > \ldots$$

Merke: Unendlich absteigende Ketten können sowohl in atomaren als auch in nicht atomaren booleschen Algebren auftreten.

Lösung zu Aufgabe 4.18

a)

$$\begin{aligned} A := \{\ & \texttt{01111111111...}, \\ & \texttt{01011111111...}, \\ & \texttt{01010111111...}, \\ & \texttt{01010101111...}, \\ & \texttt{01010101011...}, \ldots \} \end{aligned}$$

Jede untere Schranke von A beginnt mit n Wiederholungen von `01` ($n \in \mathbb{N}$) und endet auf konstant `0`. Keine dieser Schranken kann eine größte untere Schranke sein, da wir durch die Verlängerung der `01`-Kette noch näher an die Elemente von A heranrücken können.

b)

$$\begin{aligned} A := \{ & \texttt{10000000000}\ldots, \\ & \texttt{10100000000}\ldots, \\ & \texttt{10101000000}\ldots, \\ & \texttt{10101010000}\ldots, \\ & \texttt{10101010100}\ldots, \ \ldots \} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.19

a)

$$\begin{aligned} C \subseteq D \ &\overset{(4.68)}{\Rightarrow} c \geq \bigwedge D \text{ für alle } c \in C \\ &\overset{(4.70)}{\Rightarrow} \bigwedge C \geq \bigwedge D \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} C \subseteq D \ &\overset{(4.69)}{\Rightarrow} c \leq \bigvee D \text{ für alle } c \in C \\ &\overset{(4.71)}{\Rightarrow} \bigvee C \leq \bigvee D \end{aligned} \tag{4.12}$$

b) Wir betrachten die Potenzmengenalgebra $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \cap, \cup)$ und wählen:

$$\begin{aligned} C &:= \{\{1\}\} \\ D &:= \{\{1,2\},\{3\}\} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bigvee C = \{1\} \leq \bigvee D = \{1,2,3\}, \text{ aber } C \not\subseteq D \\ \bigwedge C = \{1\} \geq \bigwedge D = \{\}, \text{ aber } C \not\subseteq D \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.20

1. Beweis von (4.256)

   $a_i \geq b_i$ für alle $i \in I \ \overset{(4.68)}{\Rightarrow} a_i \geq b_i$ für alle $i \in I$ und $b_j \geq \bigwedge B$ für alle $j \in J$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a_i \geq b_i \text{ und } b_i \geq \bigwedge B \text{ für alle } i \in I \\
\overset{(2.24)}{\Rightarrow}\ & a_i \geq \bigwedge B \text{ für alle } i \in I \\
\overset{(4.70)}{\Rightarrow}\ & \bigwedge A \geq \bigwedge B
\end{aligned}$$

2. Beweis von (4.257)

$$\begin{aligned}
a_i \leq b_i \text{ für alle } i \in I \ &\overset{(4.69)}{\Rightarrow} a_i \leq b_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } b_j \leq \bigvee B \text{ für alle } j \in J \\
&\Rightarrow a_i \leq b_i \text{ und } b_i \leq \bigwedge B \text{ für alle } i \in I \\
&\overset{(2.24)}{\Rightarrow} a_i \leq \bigvee B \text{ für alle } i \in I \\
&\overset{(4.71)}{\Rightarrow} \bigvee a_i \leq \bigvee B
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.21

a) Wir codieren die Zahlen aus $\mathbb{Z}$ im *Zweierkomplement*. Positive Zahlen werden in dieser Darstellung durch ihr gewöhnliches Binärmuster dargestellt. Negative Zahlen werden gebildet, indem das Binärmuster der entsprechenden positiven Zahl invertiert und anschließend eine 1 addiert wird. Beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned}
&\ldots \\
3 &= \ldots 000011 \\
2 &= \ldots 000010 \\
1 &= \ldots 000001 \\
0 &= \ldots 000000 \\
-1 &= \ldots 111111 \\
-2 &= \ldots 111110 \\
-3 &= \ldots 111101 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

In der Computertechnik ist das Zweierkomplement die gebräuchlichste Darstellung von ganzen Zahlen. Sie ist eindeutig in dem Sinne, dass zwei verschiedene Zahlen zwei verschiedene Binärmuster aufweisen, und sie erfüllt die Eigenschaft, dass die zweimalige Negation wieder die ursprüngliche Zahl ergibt. Definieren wir die Verknüpfungen ‚$\wedge$‘ und ‚$\vee$‘ als die bitweise Und- bzw. Oder-Verknüpfung, so ist $(\mathbb{Z}, \wedge, \vee)$ eine boolesche Algebra.

b) Die in Teil a) konstruierte Algebra ist zu der booleschen Algebra isomorph, deren Grundmenge alle ab einem gewissen Index konstanten Bitfolgen umfasst.

c) Aufgrund der Isomorphie weist sie die gleichen Eigenschaften auf wie die in Teil b) genannte. Sie ist atomar, aber nicht vollständig.

Lösung zu Aufgabe 4.22

a) Ja, die boolesche Algebra ist isomorph zur modifizierten Bitfolgenalgebra. Wir können ein Element $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ als eine Bitfolge interpretieren, in denen das Bit an Position i genau dann gleich 1 ist, wenn die Menge A die Zahl i enthält. Dann sind die Elemente in B genau jene Folgen, die ab einem gewissen Index konstant 0 oder konstant 1 sind.

b) Aus dem Ergebnis von Teil a) folgt, dass die Algebra atomar, aber nicht vollständig ist.

Lösung zu Aufgabe 4.23

a) Jede aussagenlogische Formel lässt sich mit einer Wahrheitstafel darstellen. Für die weiteren Überlegungen wollen wir das Wahrheitstafelkonzept gedanklich so erweitern, dass wir darin (abzählbar viele) aussagenlogische Variablen auflisten und nicht nur jene, die in einer Formeln konkret vorkommen. Zwei Formeln sind genau dann logisch äquivalent, wenn ihre (erweiterte) Wahrheitstafeldarstellungen identisch sind, sodass wir jede Äqivalenzklasse eindeutig mit einer solchen erweiterten Tafel identifizieren können. Jede Tafel wird eindeutig durch die Ergebnisspalte repräsentiert, die dann eine unendliche Bitsequenz ist. Da jede aussagenlogische Formel nur endlich viele Variablen enthalten kann, handelt es sich bei jeder Formel um eine periodische Bitsequenz mit einer Zweierpotenz-Periode. Umgekehrt entspricht jede Bitfolge mit einer Zweierpotenz-Periode auch eine entsprechende Wahrheitstafel und damit einer Äquivalenzklasse. Folglich ist die Lindenbaum-Tarski-Algebra zu der booleschen Algebra isomorph, die aus den periodischen Bitfolgen besteht, deren Periodenlänge einer Zweierpotenz ist.

b) Die Algebra ist nicht atomar, da die periodische Bitfolgenalgebra nicht atomar ist.

c) Ja, sie ist vollständig, da die periodische Bitfolgenalgebra vollständig ist.

Lösung zu Aufgabe 4.24

a) 1. Beweis von (4.258)
Die Beziehung (4.59) besagt $a \wedge b \leq a$. Wäre $a \wedge b \neq 0$ und gleichzeitig $a \wedge b \neq a$, so wäre $a \wedge b$ ein Element mit $0 < a \wedge b < a$, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass a ein Atom ist.

2. Beweis von (4.259)
Die Richtung von rechts nach links folgt aus (4.58). Für die andere Richtung gilt:

$$a \leq (b \vee c) \overset{(4.42)}{\Rightarrow} a = a \wedge (b \vee c) \overset{(4.18)}{=} (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Aus $0 < a$ folgt, dass $(a \wedge b)$ und $(a \wedge c)$ nicht beide gleich 0 sein können, und aus (4.258) folgt dann $a \wedge b = a$ oder $a \wedge c = a$. Im ersten Fall ist $a \leq b$ und im zweiten Fall $a \leq c$.

b) 1. Richtung von rechts nach links

$$\begin{aligned} a \leq c \text{ für ein } c \in C &\overset{(4.69)}{\Rightarrow} a \leq c \leq \bigvee C \\ &\overset{(2.24)}{\Rightarrow} a \leq \bigvee C \end{aligned}$$

2. Richtung von links nach rechts
Es sei I ein Indexmenge von C, es gelte also $C = \{c_i \mid i \in I\}$. Die Argumentationskette ist die gleiche wie in der vorherigen Teilaufgabe und basiert wie oben auf der Anwendung des Distributivgesetzes (in diesem Fall in seiner unendlichen Variante) und der Eigenschaft (4.258):

$$\begin{aligned} a \leq \bigvee C &\overset{(4.42)}{\Rightarrow} a = a \wedge \bigvee C \\ &\overset{(4.79)}{\Rightarrow} a = \bigvee (a \wedge c_i) \end{aligned}$$

Aus $0 < a$ folgt, dass die Elemente $(a \wedge c_i)$ nicht alle gleich 0 sein können, und aus (4.258) folgt dann $a \wedge c_i = a$ für ein $i \in I$. Für dieses c_i gilt $a \leq c_i$, was zu beweisen war.

c) Vorbemerkung: Sind a und c zwei Atome, so gilt niemals $a < c$. Damit können wir auf den folgenden Zusammenhang zurückgreifen:

$$a \leq c \Leftrightarrow a = c \tag{4.13}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} a \leq \bigvee C &\overset{(4.260)}{\Leftrightarrow} a \leq c \text{ für ein } c \in C \\ &\overset{(4.13)}{\Leftrightarrow} a = c \text{ für ein } c \in C \\ &\Leftrightarrow a \in C \end{aligned}$$

a) Für $b = y_0$ und $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ gilt:

$$b \wedge \bigvee_{a_i \in A} a_i = y_0 \wedge \sup\{x_i \mid i \in \mathbb{Z}\} = y_0 \wedge 1 = y_0$$

$$\bigvee_{a_i \in A} (b \wedge a_i) = \sup\{y_0 \wedge x_i \mid i \in \mathbb{Z}\} = \sup\{x_i \mid i \leq 0\} = x_0$$

b) Für $b = x_0$ und $A = \{y_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ gilt:

$$b \wedge \bigvee_{a_i \in A} a_i = x_0 \wedge \sup\{y_i \mid i \in \mathbb{Z}\} = x_0 \wedge 1 = x_0$$

$$\bigvee_{a_i \in A} (b \wedge a_i) = \sup\{x_0 \wedge y_i \mid i \in \mathbb{Z}\} = \sup\{y_i \mid i \leq 0\} = y_0$$

c) Nein. Die Distributivität bedeutet, dass die Eigenschaften, die wir in den vorhergehenden Teilaufgaben betrachtet haben, für alle Mengen A mit höchstens zwei Elementen erfüllt sind. Die Distributivität gilt dann auch für alle endlichen Mengen, aber (in Verbänden) nicht notwendigerweise für unendliche Mengen.

d) Nein, denn wir haben mit Lemma 4.21 gezeigt, dass die Verknüpfungen ‚$\wedge$' und ‚$\vee$' in booleschen Algebren auch für unendliche Mengen distributiv sind. Somit kann der untersuchte Verband keine boolesche Algebra sein.

Dass keine boolesche Algebra vorliegt, lässt sich auch direkt erkennen, denn für kein von 0 und 1 verschiedenes Element existiert ein inverses Element. Der betrachtete Verband ist somit zwar beschränkt, aber nicht komplementär.

Lösung zu Aufgabe 4.26

Wir beweisen (4.262). Der Beweis von (4.263) erfolgt analog.

1. Wir zeigen: $b \wedge \bigwedge a_i \leq \bigwedge (b \wedge a_i)$

$$\begin{aligned}
&\overset{(4.68)}{\Rightarrow} \bigwedge a_i \leq a_i \text{ für alle } i \in I \\
&\overset{(4.45)}{\Rightarrow} b \wedge \bigwedge a_i \leq b \wedge a_i \text{ für alle } i \in I \\
&\overset{(4.70)}{\Rightarrow} b \wedge \bigwedge a_i \leq \bigwedge (b \wedge a_i) \text{ für alle } i \in I
\end{aligned}$$

2. Wir zeigen: $\bigwedge (b \wedge a_i) \leq b \wedge \bigwedge a_i$

$$\begin{aligned}
&\overset{(4.59)}{\Rightarrow} b \wedge a_i \leq b \text{ für alle } i \in I \text{ und } b \wedge a_i \leq a_i \text{ für alle } i \in I \\
&\overset{(4.256)}{\Rightarrow} \bigwedge (b \wedge a_i) \leq b \text{ und } \bigwedge (b \wedge a_i) \leq \bigwedge a_i
\end{aligned}$$

$$\overset{(4.55)}{\Rightarrow} \bigwedge \left(b \wedge a_i\right) \leq b \wedge \bigwedge a_i$$

Lösung zu Aufgabe 4.27

$$\overset{(4.68)}{\Rightarrow} \bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{j\in J} a_{ij} \leq \bigwedge_{j\in J} a_{ij} \text{ für alle } i \in I$$

$$\overset{(4.68)}{\Rightarrow} \bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{j\in J} a_{ij} \leq \bigwedge_{j\in J} a_{ij} \text{ für alle } i \in I \text{ und } \bigwedge_{j\in J} a_{ij} \leq a_{ij} \text{ für alle } i \in I \text{ und } j \in J$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{j\in J} a_{ij} \leq a_{ij} \text{ für alle } i \in I \text{ und } j \in J$$

$$\overset{(4.70)}{\Rightarrow} \bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{j\in J} a_{ij} \leq \bigwedge_{i\in I} a_{ij} \text{ für alle } j \in J$$

$$\overset{(4.70)}{\Rightarrow} \bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{j\in J} a_{ij} \leq \bigwedge_{j\in J} \bigwedge_{i\in I} a_{ij}$$

Auf die gleiche Weise zeigt man

$$\bigwedge_{j\in J} \bigwedge_{i\in I} a_{ij} \leq \bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{j\in J} a_{ij}$$

Der Beweis von (4.265) erfolgt analog.

Lösung zu Aufgabe 4.28

a)

$$\begin{aligned} a \wedge b \neq 0 \quad &\overset{(4.59)}{\Rightarrow} 0 < a \wedge b \leq a \text{ und } 0 < a \wedge b \leq b \\ &\Rightarrow \text{Es existiert ein } c \in B\backslash\{0\} \text{ mit } c \leq a \text{ und } c \leq b \\ &\overset{(4.83)}{\Rightarrow} a \text{ und } b \text{ sind kompatibel} \\ &\Rightarrow a \not\perp b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \wedge b = 0 \quad &\overset{(4.61)}{\Rightarrow} \inf\{a, b\} = 0 \\ &\Rightarrow \text{Für alle } c \text{ mit } c \leq a \text{ und } c \leq b \text{ gilt } c = 0 \\ &\Rightarrow \text{Es gibt kein } c \in B\backslash\{0\} \text{ mit } c \leq a \text{ und } c \leq b \\ &\overset{(4.83)}{\Rightarrow} a \text{ und } b \text{ sind nicht kompatibel} \\ &\Rightarrow a \perp b \end{aligned}$$

b)

$$a \perp b \overset{(4.84)}{\Rightarrow} a \wedge b = 0$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow (a \wedge b) \vee \neg b = \neg b \\ \overset{(4.180)}{} & \Rightarrow a \vee \neg b = \neg b \\ \overset{(4.44)}{} & \Rightarrow a \leq \neg b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \leq \neg b \quad \overset{(4.42)}{} & \Rightarrow a = a \wedge \neg b \\ & \Rightarrow a \wedge b = a \wedge \neg b \wedge b = 0 \\ \overset{(4.84)}{} & \Rightarrow a \perp b \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.29

Wir setzen:

$$c := \neg a \wedge b$$

Aus der Definition von c folgen unmittelbar die Beziehungen $c \leq b$ und $a \perp c$. Es bleibt zu zeigen, dass $0 < c < b$ gilt. Wir haben bereits $0 \leq c \leq b$, es reicht also aus, die Beziehungen $c \neq 0$ und $c \neq b$ zu zeigen. Für beide Behauptungen liefern wir einen Widerspruchsbeweis.

1. Aus der Annahme $c = 0$ folgt, dass $\neg a$ das inverse Element von b ist. Dann wäre $a = b$, im Widerspruch zur Voraussetzung $a < b$.

2. Aus der Annahme $c = b$ folgt

$$\begin{aligned} a &= a \wedge b && \text{(wegen } a < b\text{)} \\ &= (a \wedge b) \wedge c && \text{(wegen } c = b\text{)} \\ &= a \wedge b \wedge \neg a \wedge b && \text{(Definition von } c\text{)} \\ &= (a \wedge \neg a) \wedge b \\ &= 0, \end{aligned}$$

   im Widerspruch zur Voraussetzung $0 < a$.

Lösung zu Aufgabe 4.30

1. Beweis von (4.267):

$$\begin{aligned} & \neg C \subseteq \neg D \Leftrightarrow C \subseteq D \\ \overset{(4.86)}{} & \Leftrightarrow \bigvee C \leq \bigvee D \\ \overset{(4.47)}{} & \Leftrightarrow \neg \bigvee C \geq \neg \bigvee D \\ \overset{(4.78)}{} & \Leftrightarrow \bigwedge \neg C \geq \bigwedge \neg D \end{aligned}$$

2. Beweis von (4.268):

$$\begin{aligned}
\neg C = \neg D &\Leftrightarrow \neg C \subseteq \neg D \text{ und } \neg D \subseteq \neg C \\
&\overset{(4.267)}{\Leftrightarrow} \bigwedge \neg C \geq \bigwedge \neg D \text{ und } \bigwedge \neg D \geq \bigwedge \neg C \\
&\Leftrightarrow \bigwedge \neg C = \bigwedge \neg D
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.31

Ja, das Lemma verliert seine Gültigkeit. Wir können mit dem gleichen Gegenbeispiel argumentieren, das wir in Übungsaufgabe 4.19 verwendet haben.

Lösung zu Aufgabe 4.32

1. Richtung von links nach rechts

   Wir setzen:

   $$a := \neg \bigvee A \tag{4.14}$$

   Wäre $\bigvee A \neq 1$, dann wäre $a \neq 0$. Wir zeigen, dass a nicht in A enthalten und $A \cup \{a\}$ eine Antikette ist, im Widerspruch zur Maximalität von A.

   $$a \in A \Rightarrow \bigvee A = a \vee \bigvee A \overset{(4.14)}{=} \neg \bigvee A \vee \bigvee A = 1,$$

   im Widerspruch zu $\bigvee A \neq 1$.

   Es sei $a_i \in A$. Wir zeigen $a_i \wedge a = 0$:

   $$\begin{aligned}
   a_i \wedge a &\overset{(4.14)}{=} a_i \wedge \neg \bigvee A \\
   &\overset{(4.78)}{=} a_i \wedge \bigwedge_{a_j \in A} \neg a_j \\
   &= a_i \wedge \neg a_i \wedge \bigwedge_{\substack{a_j \in A \\ j \neq i}} \neg a_j \\
   &= 0
   \end{aligned}$$

2. Richtung von rechts nach links

   Wäre A nicht maximal, so gäbe es ein Atom a mit der Eigenschaft, dass $A \cup \{a\}$ eine Antikette ist. a wäre also zu allen Elementen aus A orthogonal und wir hätten:

   $$a = a \wedge 1 = a \wedge \bigvee A \overset{(4.79)}{=} \bigvee_{a_i \in A} (a \wedge a_i) = \bigvee_{a_i \in A} 0 = 0$$

Als Atom ist a aber von 0 verschieden.

Lösung zu Aufgabe 4.33

Die Behauptung ist falsch. Sei B die Potenzmengenalgebra $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \cap, \cup)$ und $D = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$. Eine Antikette E mit $E \subseteq D$ dürfte nur ein einziges Element von D enthalten, und in beiden möglichen Fällen ist die behauptete Eigenschaft nicht erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 4.34

A sei eine Antikette im Sinne von Definition 4.26. Wir beweisen die Behauptung durch Widerspruch und nehmen an, dass für zwei Elemente $p, q \in A$ die Beziehung $p < q$ oder die Beziehung $q < p$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p < q$. Dann gilt $0 < p < q$. Hieraus folgt $p \not\perp q$, im Widerspruch zur Antiketteneigenschaft von A.

Dass die Umkehrung nicht gilt, demonstriert die Potenzmengenalgebra

$$(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \cap, \cup).$$

Die Teilmenge $\{\{1,2\},\{1,3\}\}$ ist eine Antikette im Sinne der in dieser Aufgabe gegebenen Definition. Wegen $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\}$ gilt aber $\{1,2\} \not\perp \{1,3\}$, sodass die Teilmenge keine Antikette im Sinne von Definition 4.26 ist.

Lösung zu Aufgabe 4.35

a) Die erste und die dritte Ordnung sind separieren, die zweite und die vierte nicht. In der zweiten Ordnung erfüllt das zweite Element von links nicht die Forderung (4.28). Dass die vierte Ordnung nicht separierend ist, folgt aus der Antwort zu Teil b).

b) Die Aussage ist falsch, da wir im Gegensatz zu Lemma 4.29, dessen Aussage fast identisch klingt, das Nullelement in der Halbordnung belassen haben. Da alle $a \in B$ die Beziehung $0 \leq a$ erfüllen, ist die (4.85) immer wahr. Das bedeutet, dass es in $(B, \leq)$ keine inkompatiblen Elemente gibt und es damit unmöglich ist, die Forderung (4.89) zu erfüllen.

Lösung zu Aufgabe 4.36

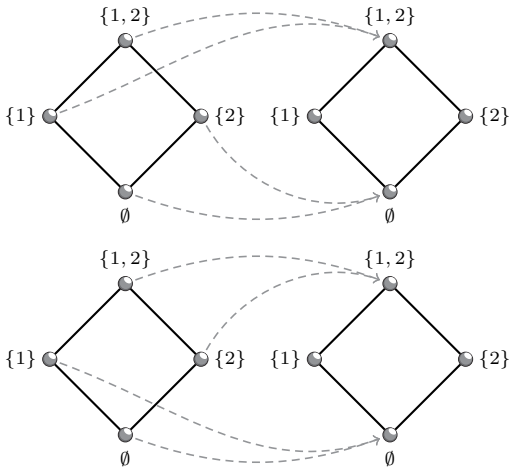
$(B, \wedge_B, \vee_B)$ und $(A, \wedge_B, \vee_B)$ seien boolesche Algebren. Ein *boolescher Homomorphismus* σ ist eine Abbildung $\sigma : B \to A$, die für alle $a, b \in B$ die folgenden Beziehungen

erfüllt:

$$\sigma(0_A) = 0_B \tag{4.15}$$
$$\sigma(1_A) = 1_B \tag{4.16}$$
$$\sigma(a \wedge_A b) = \sigma(a) \wedge_B \sigma(b) \tag{4.17}$$
$$\sigma(a \vee_A b) = \sigma(a) \vee_B \sigma(b) \tag{4.18}$$

Lösung zu Aufgabe 4.37

a) Neben der identischen Abbildung, die ebenfalls ein Homomorphismus ist, existieren die folgenden beiden Homomorphismen:



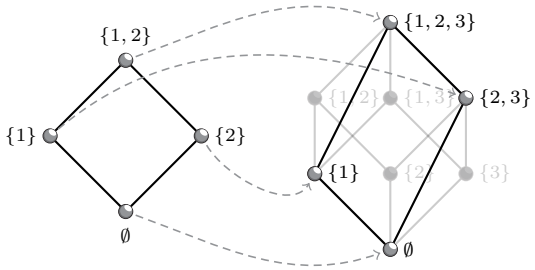
b) Ja. Die Abbildung ist genau dann injektiv, wenn die neutralen Elemente ein eindeutig bestimmtes Urbild haben.

Lösung zu Aufgabe 4.38

a) Nein. Hierfür müsste das Einselement der linken Algebra ($\{1, 2\}$) auf das Einselement der rechten Algebra ($\{1, 2, 3\}$) abgebildet werden, was nicht der Fall ist.

b) Um die Homomorphieeigenschaft herzustellen, müssen zwei Zuordnungen verändert werden. Zunächst müssen wir sicherstellen, dass das Element $\{1, 2\}$ auf das

Element $\{1,2,3\}$ abgebildet wird. Als Konsequenz hiervon ist die Bildmenge nicht mehr abgeschlossen. Um die Abgeschlossenheit wiederherzustellen, müssen wir noch eine zweite Zuordnung ändern:



c) Würden wir auf die Forderung $\sigma(1) = 1$ verzichten, so wäre die in dieser Aufgabe untersuchte Abbildung ein Homomorphismus. Ein analoges Beispiel lässt sich für den anderen Fall konstruieren.

Lösung zu Aufgabe 4.39

Die Homomorphieeigenschaften (4.96) und (4.97) stellen sicher, dass die Verknüpfungen ‚$\wedge$' und ‚$\vee$' kommutativ und distributiv sind. Es bleibt, die Existenz von neutralen und inversen Elementen zu zeigen.

1. Wir zeigen: $1_A := \sigma(1)$ und $0_A := \sigma(0)$ sind neutrale Elemente in A.

$$a \in A \Rightarrow \text{Es existiert ein } b \in B \text{ mit } \sigma(b) = a$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a \wedge 1_A = a \wedge \sigma(1) = \sigma(b) \wedge \sigma(1) = \sigma(b \wedge 1) = \sigma(b) = a \\ a \vee 0_A = a \vee \sigma(0) = \sigma(b) \vee \sigma(0) = \sigma(b \vee 0) = \sigma(b) = a \end{cases}$$

2. Wir zeigen: Jedes Element $a \in A$ hat ein inverses Element in A.

$$a \in A \Rightarrow \text{Es existiert ein } b \in B \text{ mit } \sigma(b) = a$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a \wedge \sigma(\neg b) = \sigma(b) \wedge \sigma(\neg b) = \sigma(b \wedge \neg b) = \sigma(0) = 0_A \\ a \vee \sigma(\neg b) = \sigma(b) \vee \sigma(\neg b) = \sigma(b \vee \neg b) = \sigma(1) = 1_A \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sigma(\neg b) \text{ ist ein inverses Element von } a$$

Lösung zu Aufgabe 4.40

Es sei σ ein boolescher Homomorphismus. Wir zeigen:

$$\sigma \text{ ist ordnungsreflektierend} \Rightarrow \sigma \text{ ist injektiv}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(a) = \sigma(b) &\Rightarrow \sigma(a) \leq \sigma(b) \text{ und } \sigma(b) \leq \sigma(a) \\
&\underset{(4.103)}{\Rightarrow} a \leq b \text{ und } b \leq a \\
&\Rightarrow a = b
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.41

a) Vorbemerkung: Alle Atome sind von 0 verschieden, es gilt also:

$$a \in A \Rightarrow a \neq 0 \tag{4.19}$$

1. Wir zeigen: $\sigma(0) = \emptyset$ und $\sigma(1) = A$

$$\begin{aligned}
\sigma(0) &= \{a \in A \mid a \leq 0\} \underset{(4.19)}{=} \emptyset \\
\sigma(1) &= \{a \in A \mid a \leq 1\} = A
\end{aligned}$$

2. Wir zeigen: $\sigma(c \wedge d) = \sigma(c) \cap \sigma(d)$

$$\begin{aligned}
\sigma(c \wedge d) &= \{a \in A \mid a \leq c \wedge d\} \\
&\underset{(4.63)}{=} \{a \in A \mid a \leq c \text{ und } a \leq d\} \\
&= \{a \in A \mid a \leq c\} \cap \{a \in A \mid a \leq d\} \\
&= \sigma(c) \cap \sigma(d)
\end{aligned}$$

3. Wir zeigen: $\sigma(c \vee d) = \sigma(c) \cup \sigma(d)$

$$\begin{aligned}
\sigma(c \vee d) &= \{a \in A \mid a \leq c \vee d\} \\
&\underset{(4.259)}{=} \{a \in A \mid a \leq c \text{ oder } a \leq d\} \\
&= \{a \in A \mid a \leq c\} \cup \{a \in A \mid a \leq d\} \\
&= \sigma(c) \cup \sigma(d)
\end{aligned}$$

b) Für alle $C \subseteq A$ ist $\sigma(\bigvee C) = C$.

$$\begin{aligned}
\sigma(\bigvee C) &= \{a \in A \mid a \leq \bigvee C\} \\
&\underset{(4.261)}{=} \{a \in A \mid a \in C\} \\
&= C
\end{aligned}$$

c) Die Surjektivität von σ folgt aus dem Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe. Die Injektivität lässt sich folgendermaßen beweisen:

$$\begin{aligned}\sigma(c) = \sigma(d) &\Rightarrow \{a \in A \mid a \leq c\} = \{a \in A \mid a \leq d\} \\ &\Rightarrow \bigvee\{a \in A \mid a \leq c\} = \bigvee\{a \in A \mid a \leq d\} \\ &\underset{(4.74)}{\Rightarrow} c = d\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.42

Beide Aussagen folgen aus der Tatsache, dass atomare und vollständige boolesche Algebren, worunter auch die endlichen booleschen Algebren fallen, isomorph zu einer Potenzmengenalgebra sind. Im endlichen Fall ist die Mächtigkeit der Potenzmenge eine Zweierpotenz, und nach dem Satz von Cantor enthält die Potenzmenge einer unendlichen Grundmenge überabzählbar viele Elemente.

Lösung zu Aufgabe 4.43

1. Wir nehmen (4.270) an und zeigen (4.110)

$$\begin{aligned}a \in F \text{ und } b \in B \text{ und } b \geq a &\underset{(4.44)}{\Rightarrow} a \in F \text{ und } b \in B \text{ und } a \vee b = b \\ &\underset{(4.270)}{\Rightarrow} a \vee b \in F \text{ und } a \vee b = b \\ &\Rightarrow b \in F\end{aligned}$$

2. Wir nehmen (4.110) an und zeigen (4.270)

$$\begin{aligned}a \in F \text{ und } b \in B &\underset{(4.60)}{\Rightarrow} a \in F \text{ und } b \in B \text{ und } a \leq a \vee b \\ &\underset{(4.110)}{\Rightarrow} a \vee b \in F\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.44

Verwenden wir die abgeschwächte Definition, so ist auch die Menge B ein Filter einer booleschen Algebra $(B, \wedge, \vee)$. Tatsächlich ist B der einzige hinzukommende Filter, da jeder Filter, der das Element 0 enthält, auch alle größeren Elemente enthalten muss. Das bedeutet, dass jeder Filter F mit $0 \in F$ mit der Menge B identisch ist.

In Büchern, die diese Definition zugrunde legen, wird der neu hinzugekommene Filter B als ein *unechter Filter* bezeichnet und alle Filter, die das Element 0 nicht enthalten, als *echte Filter*.

Lösung zu Aufgabe 4.45

Es sei

$$\uparrow a = \uparrow b \tag{4.20}$$

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} a \in \uparrow a \ {\scriptstyle (4.20)} \Rightarrow \ a \in \uparrow b \ {\scriptstyle (4.116)} \Rightarrow \ a \geq b \\ b \in \uparrow b \ {\scriptstyle (4.20)} \Rightarrow \ b \in \uparrow a \ {\scriptstyle (4.116)} \Rightarrow \ b \geq a \end{array}\right\} \Rightarrow \ a = b$$

Lösung zu Aufgabe 4.46

a) Da B mindestens zwei Elemente enthält, gilt:

$$0 \neq 1 \tag{4.21}$$

Wir setzen:

$$F := \{a \in B \mid \sigma(a) = 1\} \tag{4.22}$$

1. Wir zeigen: $1 \in F$ und $0 \notin F$

$$\begin{aligned} &{\scriptstyle (4.95)} \Rightarrow \sigma(1) = 1 \Rightarrow \ 1 \in F \\ &{\scriptstyle (4.94)} \Rightarrow \sigma(0) = 0 \ {\scriptstyle (4.21)} \Rightarrow \ \sigma(0) \neq 1 \Rightarrow \ 0 \notin F \end{aligned}$$

2. Wir zeigen: $a \in F$ und $b \in B$ mit $b \geq a \Rightarrow b \in F$

$$\begin{aligned} a \in F \text{ und } b \geq a \ &\overset{(4.22)}{\underset{(4.105)}{\Rightarrow}} \sigma(a) = 1 \text{ und } \sigma(b) \geq \sigma(a) \\ &\Rightarrow \sigma(b) = 1 \\ &{\scriptstyle (4.22)} \Rightarrow b \in F \end{aligned}$$

3. Wir zeigen: $a \in F$ und $b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$

$$\begin{aligned} a \in F \text{ und } b \in F \ &{\scriptstyle (4.22)} \Rightarrow \sigma(a) = 1 \text{ und } \sigma(b) = 1 \\ &{\scriptstyle (4.96)} \Rightarrow \sigma(a \wedge b) = 1 \\ &{\scriptstyle (4.22)} \Rightarrow a \wedge b \in F \end{aligned}$$

b) Der Beweis erfolgt analog zu a).

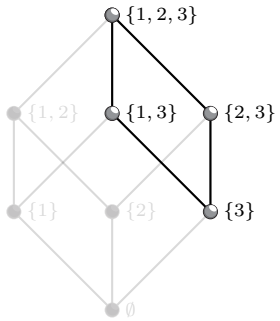
c) Die in a) definierte Menge ist der Kokern und die in b) definierte Menge der Kern von σ.

Lösung zu Aufgabe 4.47

a)

$$\begin{aligned} a \in F \text{ und } b \in F &\overset{(4.60)}{\underset{(4.110)}{\Rightarrow}} a \vee \neg b \in F \text{ und } \neg a \vee b \in F \\ &\overset{(4.111)}{\Rightarrow} (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b) \in F \\ &\overset{(4.210)}{\Rightarrow} a \leftrightarrow b \in F \end{aligned}$$

b) Nein. Wir betrachten die Potenzmengenalgebra $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \cap, \cup)$ und deren Ultrafilter $U := \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.



Mit $a = \{1\}$ und $b = \{1,2\}$ gilt $a, b \notin U$, aber $a \leftrightarrow b = \{1,3\} \in U$.

c)

$$\begin{aligned} a, b \in U \text{ oder } a, b \notin U &\overset{(4.124)}{\Leftrightarrow} a, b \in U \text{ oder } \neg a, \neg b \in U \\ &\overset{(4.114)}{\Leftrightarrow} a \wedge b \in U \text{ oder } \neg a \wedge \neg b \in U \\ &\overset{(4.112)}{\underset{(4.123)}{\Rightarrow\!\!\!\!\Leftarrow}} (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \in U \\ &\overset{(4.211)}{\Leftrightarrow} a \leftrightarrow b \in U \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.48

1. Wir zeigen: $x \in \uparrow a \;\Rightarrow\; x \in \bigcap M$

$$\begin{aligned} x \in \uparrow a &\overset{(4.116)}{\Rightarrow} x \geq a \\ &\overset{(4.110)}{\Rightarrow} x \in U \text{ für alle } U \in M \\ &\Rightarrow x \in \bigcap M \end{aligned}$$

2. Wir zeigen: $x \notin \uparrow a \;\Rightarrow\; x \notin \bigcap M$

Aus Lemma 4.38 folgt die Existenz eines Filters F mit $\uparrow a \subseteq F$ und $\neg x \in F$, der nach Satz 4.46 in einem Ultrafilter U eingebettet ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \uparrow a \subseteq U \text{ und } \neg x \in U &\underset{(4.116)}{\Rightarrow} a \in U \text{ und } \neg x \in U \\ &\Rightarrow U \in M \text{ und } \neg x \in U \\ &\underset{(4.124)}{\Rightarrow} U \in M \text{ und } x \notin U \\ &\Rightarrow x \notin \bigcap M \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.49

a) Wir zeigen zunächst die zu (4.272) analoge Beziehung:

$$a \in I \text{ und } b \in I \;\Rightarrow\; a \not\leftrightarrow b \in I \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} a \in I \text{ und } b \in I &\underset{(4.120)}{\overset{(4.59)}{\Rightarrow}} a \wedge \neg b \in I \text{ und } \neg a \wedge b \in I \\ &\underset{(4.121)}{\Rightarrow} (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \in I \\ &\underset{(4.210)}{\Rightarrow} a \not\leftrightarrow b \in I \end{aligned}$$

Damit können wir den Beweis von Lemma 4.48 analog replizieren:

1. Reflexivität

$$\underset{(4.119)}{\Rightarrow}\; 0 \in I \;\underset{(4.209)}{\Rightarrow}\; a \not\leftrightarrow a \in I \;\underset{(4.275)}{\Rightarrow}\; a \sim a$$

2. Symmetrie

$$a \sim b \;\underset{(4.275)}{\Rightarrow}\; a \not\leftrightarrow b \in I \Rightarrow\; b \not\leftrightarrow a \in I \;\underset{(4.275)}{\Rightarrow}\; b \sim a$$

3. Transitivität

$$\begin{aligned} a \sim b \text{ und } b \sim c &\underset{(4.275)}{\Rightarrow} a \not\leftrightarrow b \in I \text{ und } b \not\leftrightarrow c \in I \\ &\underset{(4.23)}{\Rightarrow} (a \not\leftrightarrow b) \not\leftrightarrow (b \not\leftrightarrow c) \in I \\ &\underset{(4.225)}{\Rightarrow} a \not\leftrightarrow c \in I \\ &\underset{(4.275)}{\Rightarrow} a \sim c \end{aligned}$$

b) 1. Wir zeigen: $a_1 \sim a_2$ und $b_1 \sim b_2 \Rightarrow a_1 \wedge b_1 \sim a_2 \wedge b_2$

$$\begin{aligned} a_1 \sim a_2 \text{ und } b_1 \sim b_2 &\underset{(4.275)}{\Rightarrow} a_1 \not\leftrightarrow a_2 \in I \text{ und } b_1 \not\leftrightarrow b_2 \in I \\ &\underset{(4.121)}{\Rightarrow} (a_1 \not\leftrightarrow a_2) \vee (b_1 \not\leftrightarrow b_2) \in I \\ &\underset{(4.120)}{\overset{(4.252)}{\Rightarrow}} (a_1 \wedge b_1) \not\leftrightarrow (a_2 \wedge b_2) \in I \\ &\underset{(4.275)}{\Rightarrow} (a_1 \wedge b_1) \sim (a_2 \wedge b_2) \end{aligned}$$

2. Beweis von (4.130):

$$\begin{aligned} a_1 \sim a_2 \text{ und } b_1 \sim b_2 &\underset{(4.275)}{\Rightarrow} a_1 \not\leftrightarrow a_2 \in I \text{ und } b_1 \not\leftrightarrow b_2 \in I \\ &\underset{(4.121)}{\Rightarrow} (a_1 \not\leftrightarrow a_2) \vee (b_1 \not\leftrightarrow b_2) \in I \\ &\underset{(4.120)}{\overset{(4.253)}{\Rightarrow}} (a_1 \vee b_1) \not\leftrightarrow (a_2 \vee b_2) \in I \\ &\underset{(4.275)}{\Rightarrow} (a_1 \vee b_1) \sim (a_2 \vee b_2) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.50

a) 1. Beweis von (4.119)

$$\begin{aligned} \emptyset \text{ ist endlich} &\Rightarrow \emptyset \in I \\ x \text{ ist unendlich} &\Rightarrow x \notin I \end{aligned}$$

2. Beweis von (4.120)

$$\begin{aligned} a \in I \text{ und } b \in B \text{ mit } b \leq a &\Rightarrow a \text{ ist endlich und } b \subseteq a \\ &\Rightarrow b \text{ ist endlich} \\ &\Rightarrow b \in I \end{aligned}$$

3. Beweis von (4.121)

$$\begin{aligned} a \in I \text{ und } b \in I &\Rightarrow a \text{ und } b \text{ sind endlich} \\ &\Rightarrow a \cup b \text{ ist endlich} \\ &\Rightarrow a \cup b \in I \end{aligned}$$

b) Die Atome sind die einelementigen Teilmengen von x.

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} x \sim y &\underset{(4.275)}{\Leftrightarrow} x \not\leftrightarrow y \in I \\ &\underset{(4.213)}{\Leftrightarrow} (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x) \in I \\ &\Leftrightarrow (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \in I \\ &\Leftrightarrow (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \text{ ist endlich} \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass zwei Mengen aus $\mathcal{P}(x)$ genau dann in der gleichen Äquivalenzklasse sind, wenn sie sich nur durch endlich viele Elemente unterscheiden. Damit fallen insbesondere alle endlichen Mengen in eine gemeinsame Äquivalenzklasse und bilden das Nullelement der Quotientenalgebra.

d) Nein. Die Eigenschaft, atomar zu sein, ist durch die Quotientenbildung verloren gegangen. Um dies einzusehen, nehmen wir an, $[\,x\,]_\sim$ sei ein Atom. Diese Klasse ist

nicht das Nullelement, sodass x eine unendliche Menge sein muss. Da x unendlich ist, lässt sich diese Menge in die Form $y \cup z$ aufspalten, wobei y und z zwei disjunkte unendliche Mengen sind. Damit befinden sich die Äquivalenzklassen $[\,y\,]_\sim$ und $[\,z\,]_\sim$ oberhalb des Nullelements, aber unterhalb von $[\,x\,]_\sim$, im Widerspruch zu unserer Annahme, $[\,x\,]_\sim$ sei ein Atom.

Lösung zu Aufgabe 4.51

a) 1. Wir zeigen: $F \subseteq \{b \in B \mid b \geq c \text{ für ein } c \in F \cap D_a\}$

$$\begin{aligned} d \in F &\overset{(4.111)}{\Rightarrow} d \wedge a \in F \\ &\overset{(4.59)}{\Rightarrow} d \wedge a \in F \text{ und } d \wedge a \leq a \\ &\overset{(4.109)}{\underset{(4.136)}{\Rightarrow}} d \wedge a \in F \text{ und } d \wedge a \in D_a \\ &\Rightarrow d \wedge a \in F \cap D_a \\ &\overset{(4.59)}{\Rightarrow} d \geq d \wedge a \text{ und } d \wedge a \in F \cap D_a \\ &\Rightarrow d \in \{b \in B \mid b \geq c \text{ für ein } c \in F \cap D_a\} \end{aligned}$$

2. Wir zeigen: $\{b \in B \mid b \geq c \text{ für ein } c \in F \cap D_a\} \subseteq F$

$$\begin{aligned} d \in \{b \in B \mid b \geq c \text{ für ein } c \in F \cap D_a\} \\ \Rightarrow d \geq c \text{ für ein } c \in F \cap D_a \\ \Rightarrow d \geq c \text{ für ein } c \in F \\ \overset{(4.110)}{\Rightarrow} d \in F \end{aligned}$$

b) Ja. Ist F ein Ultrafilter, so ist entweder $a \in F$ oder $\neg a \in F$. Im ersten Fall können wir die Argumentation aus Teil a) eins zu eins replizieren. Für den zweiten Fall lässt sich die Argumentation anpassen, indem überall a durch $\neg a$ ersetzen. Dass der Beweis weiterhin funktioniert, liegt an der symmetrischen Definition von D_a. In dieser Menge sind nicht nur alle Elemente kleiner als a, sondern auch die Elemente kleiner als $\neg a$ enthalten.

Lösung zu Aufgabe 4.52

Es sei $A = \{a_i \mid i \in I\} \subseteq B\backslash\{0\}$ und $b \in B\backslash\{0\}$ mit $b \leq \bigvee A$. Wir zeigen, dass ein $a \in A$ mit $a \leq b$ existiert.

Die Beziehung $b \leq \bigvee A$ ist das Gleiche wie:

$$b \wedge \bigvee A = b \tag{4.24}$$

Hieraus folgt, dass ein $a_i \in A$ mit $b \wedge a_i \neq 0$ existiert. Andernfalls hätten wir

$$b \overset{(4.24)}{=} b \wedge \bigvee A = b \wedge \bigvee_{i \in I} a_i \overset{(4.79)}{=} \bigvee_{i \in I} (b \wedge a_i) = 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $b \neq 0$.

Wir setzen $a := b \wedge a_i$ und sind fertig. Das Element a ist kleiner als b. Es ist aber auch kleiner als a_i und damit aufgrund der Abgeschlossenheit nach unten ein Element der Menge A.

Lösung zu Aufgabe 4.53

a) Wir beweisen die Behauptung durch Widerspruch. Wäre

$$\bigvee E = a \text{ mit } a < 1,$$

so hätten wir $e \leq a$ für alle $e \in E$, oder, was dasselbe ist:

$$e = e \wedge a \quad \text{für alle } e \in E \tag{4.25}$$

Wegen $a < 1$ ist $\neg a > \neg 1 = 0$. Aus der Dichtheit von D folgt die Existenz eines Elements $d \in D$ mit $d \leq \neg a$, oder, was dasselbe ist, mit:

$$d = d \wedge \neg a \tag{4.26}$$

Das Element d ist zu allen Elementen aus E inkompatibel, denn für jedes $e \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} e \wedge d \overset{(4.25)}{(4.26)} &= (e \wedge a) \wedge (d \wedge \neg a) \\ &= e \wedge d \wedge (a \wedge \neg a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass nicht nur E, sondern auch $E \cup \{d\}$ eine Menge paarweise inkompatibler Elemente aus D ist, im Widerspruch zur Maximalität von E.

b) Vorbemerkung: Die zu beweisende Aussage ist eine Verallgemeinerung der ersten Aussage, da wir diese mit der Wahl $b = 1$ als Spezialfall erhalten. Um die verallgemeinerte Aussage zu beweisen, müssen wir den Beweis aus Teil a) jedoch an einer ganz bestimmten Stelle abwandeln. Im Teil a) war es ausreichend, aus dem Element a das Element $\neg a$ zu bilden und dann aufgrund der Dichtheit zu schließen, dass es in D ein Element kleiner oder gleich $\neg a$ gibt. Auf diese Weise können wir jetzt nicht mehr argumentieren, da die Menge D nur unterhalb von b dicht ist und wir keine Garantie dafür haben, dass sich $\neg a$ unterhalb von b befindet. Abhilfe schafft das Ergebnis aus Übungsaufgabe 4.29, mit dem wir den Beweis aus Teil a) folgendermaßen abwandeln können:

Wäre

$$\bigvee E = a \text{ mit } a < b,$$

so hätten wir $e \leq a$ für alle $e \in E$, oder, was dasselbe ist:

$$e = e \wedge a \quad \text{für alle } e \in E \tag{4.27}$$

Da a nicht das Nullelement sein kann, gilt $0 < a < b$. In Übungsaufgabe 4.29 haben Sie die Existenz eines Elements c mit $0 < c < b$ und $a \perp c$ nachgewiesen. Da D unter b dicht ist, muss ein Element $d \in D$ mit $d \leq c$ existieren, oder, was dasselbe ist, mit:

$$d = d \wedge c \tag{4.28}$$

Das Element d ist zu allen Elementen aus E disjunkt, denn für jedes $e \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} e \wedge d \overset{(4.27)}{(4.28)} &= (e \wedge a) \wedge (d \wedge c) \\ &= e \wedge d \wedge (a \wedge c) \\ &= 0 \qquad \text{(wegen } a \perp c\text{)} \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass nicht nur E, sondern auch $E \cup \{d\}$ eine Menge paarweise inkompatibler Elemente aus D ist, im Widerspruch zur Maximalität von E.

c) Aus $E \subseteq D$ folgt $\bigvee E \leq \bigvee D$. Es bleibt, die Beziehung

$$\bigvee E \geq \bigvee D$$

zu zeigen. Die Beziehung folgt aus der vorherigen Teilaufgabe und dem Ergebnis aus Übungsaufgabe 4.52. Dort haben Sie gezeigt, dass die Menge D dicht unter dem Element $\bigvee D$ liegt.

Lösung zu Aufgabe 4.54

Wir können die Beweis von Lemma 4.56 und 4.57 eins zu eins replizieren. Der Grund hierfür ist die Voraussetzung, dass die Menge B ein Element des Grundmodells $\mathcal{M}$ sein muss. Damit sind alle Mengen, auf die wir die Eigenschaft (4.133) im Beweis von Lemma 4.56 angewendet haben, ebenfalls in $\mathcal{M}$ enthalten. Ferner sind die in Lemma 4.54 und Korollar 4.55 als dicht erkannten Mengen D und D_a in $\mathcal{M}$ enthalten, sodass alle Schlüsse, die sich auf diese dichten Mengen beziehen, auch für $\mathcal{M}$-generische Filter zulässig sind.

Lösung zu Aufgabe 4.55

Wir führen den Beweis in zwei Schritten. Im ersten Schritt zeigen wir, dass die Menge

$$E := D \cup (P \setminus G) \tag{4.29}$$

dicht in P ist. Anschließend zeigen wir die Behauptung $G \cap D = \emptyset$ unter dem Wissen, dass der generische Filter G einen nichtleeren Schnitt mit E haben muss.

1. Wir zeigen: E ist dicht in P. (4.30)

   Wir müssen zeigen: Für alle $p \in P$ existiert ein $e \in E$ mit $e \leq p$.

   (a) 1. Fall: $p \notin G$

   $$\begin{aligned} p \notin G \ &\overset{(4.29)}{\Rightarrow} p \in E \\ &\Rightarrow \text{Es existiert ein } e \in E \text{ mit } e \leq p \end{aligned}$$

   (b) 2. Fall: $p \in G$

   $$\begin{aligned} g, p \in G \ &\overset{(4.142)}{\Rightarrow} r \leq g \text{ und } r \leq p \text{ für ein } r \in G \\ &\overset{(4.144)}{\Rightarrow} \text{Es existiert ein } e \in D \text{ mit } e \leq r \text{ und } r \leq p \\ &\Rightarrow \text{Es existiert ein } e \in D \text{ mit } e \leq p \\ &\overset{(4.29)}{\Rightarrow} \text{Es existiert ein } e \in E \text{ mit } e \leq p \end{aligned}$$

2. Wir zeigen: $G \cap D \neq \emptyset$

   $$\begin{aligned} &\overset{(4.146)}{\Rightarrow} G \cap E \neq \emptyset \\ &\overset{(4.29)}{\Rightarrow} G \cap (D \cup (P \setminus G)) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow (G \cap D) \cup (G \cap (P \setminus G)) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow (G \cap D) \cup \emptyset \neq \emptyset \\ &\Rightarrow (G \cap D) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.56

1. Beweis von (4.277)

   $$\begin{aligned} p \in C \text{ und } q \in {\downarrow} p \ &\overset{(4.148)}{\Rightarrow} p \in C \text{ und } q \leq p \\ &\overset{(4.147)}{\Rightarrow} q \in C \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} {\downarrow} p \subseteq C \ &\overset{(4.148)}{\Rightarrow} p \in {\downarrow} p \subseteq C \\ &\Rightarrow p \in C \end{aligned}$$

2. Beweis von (4.278)

   $$\begin{aligned} p \leq q \text{ und } r \in {\downarrow} p \ &\overset{(4.148)}{\Rightarrow} p \leq q \text{ und } r \leq p \\ &\overset{(2.24)}{\Rightarrow} r \leq q \end{aligned}$$

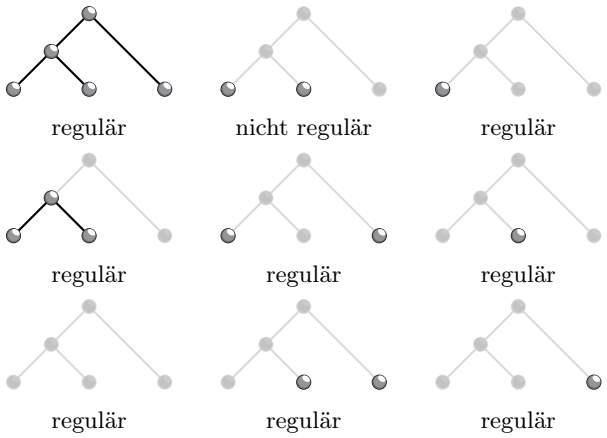
$$\overset{(4.148)}{\Rightarrow} r \in \downarrow q$$

$$\downarrow p \subseteq \downarrow q \quad \overset{(4.148)}{\Rightarrow} p \in \downarrow p \subseteq \downarrow q$$
$$\Rightarrow p \in \downarrow q$$
$$\overset{(4.148)}{\Rightarrow} p \leq q$$

3. Beweis von (4.279)

$$\downarrow p \cap \downarrow q \neq \emptyset \Leftrightarrow r \in \downarrow p \text{ und } r \in \downarrow q \text{ für ein } r \in P$$
$$\overset{(4.148)}{\Leftrightarrow} r \leq p \text{ und } r \leq q \text{ für ein } r \in P$$
$$\overset{(4.85)}{\Leftrightarrow} p \not\perp q$$

Lösung zu Aufgabe 4.57



Lösung zu Aufgabe 4.58

1. Wir zeigen: $C \cap \neg C = \emptyset$

   Wir zeigen: Aus $p \in C$ folgt $p \notin \neg C$

$$p \in C \quad \overset{(4.148)}{\Rightarrow} p \in \downarrow p \text{ und } p \in C$$
$$\Rightarrow \downarrow p \cap C \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow p \notin \neg C$$

2. Wir zeigen: $(C \cup \neg C)^R = P$

$(C \cup \neg C)^R$ ist eine Teilmenge von P, sodass wir nur noch die Teilmengenbeziehung

$$P \subseteq (C \cup \neg C)^R$$

zeigen müssen. Dies gelingt folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
p \in P &\Rightarrow \text{Für alle } r \text{ mit } r \leq p \text{ ist } {\downarrow}r \cap C \neq \emptyset \text{ oder } {\downarrow}r \cap C = \emptyset \\
&\underset{(4.280)}{\Rightarrow} \text{Für alle } r \text{ mit } r \leq p \text{ ist } {\downarrow}r \cap C \neq \emptyset \text{ oder } r \in \neg C \\
&\Rightarrow \text{Für alle } r \text{ mit } r \leq p \text{ ist } {\downarrow}r \cap C \neq \emptyset \text{ oder } {\downarrow}r \cap \neg C \neq \emptyset \\
&\Rightarrow \text{Für alle } r \text{ mit } r \leq p \text{ ist } {\downarrow}r \cap (C \cup \neg C) \neq \emptyset \\
&\underset{(4.151)}{\Rightarrow} p \in (C \cup \neg C)^R
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4.59

Wir müssen die folgende Beziehung zeigen:

$$\text{Für alle } q \notin {\downarrow}p \text{ existiert ein } r \text{ mit } r \leq q \text{ und } {\downarrow}r \cap {\downarrow}p = \emptyset \tag{4.31}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
q \notin {\downarrow}p &\underset{(4.148)}{\Rightarrow} q \not\leq p \\
&\underset{(4.89)}{\Rightarrow} \text{Es existiert ein } r \in P \text{ mit } r \leq q \text{ und } r \perp p \\
&\underset{(4.279)}{\Rightarrow} \text{Es existiert ein } r \in P \text{ mit } r \leq q \text{ und } {\downarrow}r \cap {\downarrow}p = \emptyset
\end{aligned}$$

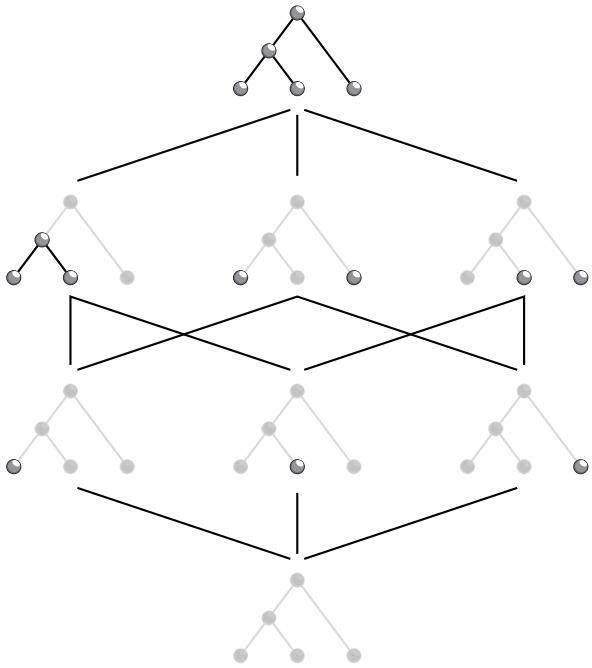
Lösung zu Aufgabe 4.60

a)

$\rho(\text{a}) =$ { a,b,c,d,e } $\quad \rho(\text{b}) =$ { b,c,d } $\quad \rho(\text{c}) =$ { c }

$\rho(\text{d}) =$ { d } $\quad \rho(\text{e}) =$ { e }

b) Entsprechend der in Satz 4.73 ausgeführten Konstruktion erhalten wir die folgende boolesche Algebra:



c) Sie ist isomorph zur Potenzmengenalgebra $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \cap, \cup)$.

Lösung zu Aufgabe 4.61

1. Beweis von (4.281). Es sei

$$D \subseteq P \text{ ist dicht in } P \tag{4.32}$$

Sei $b \in B\backslash\{0\}$. Wir zeigen, dass ein $d \in D$ mit $\rho(d) \leq b$ existiert.

$$\begin{aligned} b \in B\backslash\{0\} &\overset{(4.171)}{\Rightarrow} \rho(p) \leq b \text{ für ein } p \in P \\ &\overset{(4.32)}{\Rightarrow} \rho(p) \leq b \text{ für ein } p \in P \text{ und } q \leq p \text{ für ein } q \in D \\ &\overset{(4.173)}{\Rightarrow} \rho(p) \leq b \text{ für ein } p \in P \text{ und } \rho(q) \leq \rho(p) \text{ für ein } q \in D \\ &\overset{(4.173)}{\Rightarrow} \rho(q) \leq b \text{ für ein } q \in D \end{aligned}$$

2. Beweis von (4.282). Es sei

$$D \subseteq B\backslash\{0\} \text{ dicht in } B \tag{4.33}$$

Wir setzen

$$E := \{p \mid \rho(p) \leq d \text{ für ein } d \in D\} \tag{4.34}$$

und zeigen, dass für jedes $q \in P$ ein $p \in E$ mit $p \leq q$ existiert:

$$\begin{aligned} q \in P &\overset{(4.169)}{\Rightarrow} \rho(q) \in B\backslash\{0\} \\ &\overset{(4.33)}{\Rightarrow} d \leq \rho(q) \text{ für ein } d \in D \\ &\overset{(4.171)}{\Rightarrow} \rho(p) \leq d \leq \rho(q) \text{ für ein } d \in D \text{ und ein } p \in P \\ &\overset{(4.34)}{\Rightarrow} p \in E \text{ und } \rho(p) \leq \rho(q) \\ &\overset{(4.170)}{\Rightarrow} p \in E \text{ und } p \leq q \end{aligned}$$

5 Boolesche Modelle

Lösung zu Aufgabe 5.1

$$
\begin{aligned}
[\![\emptyset \in y]\!] &= \{1,3\} \\
[\![\{\emptyset^{1,3}\} \in y]\!] &= \{1,3\} \\
[\![\emptyset \in x]\!] &= \{2,3\} \\
[\![\{\emptyset^{1,2,3}\} \in x]\!] &= \{1,3\} \\
[\![x \subseteq \emptyset]\!] &= \emptyset \\
[\![x = \emptyset]\!] &= \emptyset \\
[\![x \subseteq \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!] &= \{2\} \\
[\![\{\emptyset^{1,2,3}\} \subseteq x]\!] &= \{2,3\} \\
[\![x = \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!] &= \{2\}
\end{aligned}
$$

Rechnungen:

$$
\begin{aligned}
[\![\emptyset \in y]\!] &= \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(y)} (y(v) \wedge [\![\emptyset = v]\!]) \\
&= (y(\emptyset) \wedge [\![\emptyset = \emptyset]\!]) \vee \big(y(\{\emptyset^{1,2,3}\}) \wedge [\![\emptyset = \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!]\big) \\
&= (\{1,3\} \wedge \{1,2,3\}) \vee (\{1,2,3\} \wedge \{\}) \\
&= \{1,3\} \qquad (5.1) \\
[\![\{\emptyset^{1,3}\} \in y]\!] &= \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(y)} \big(y(v) \wedge [\![\{\emptyset^{1,3}\} = v]\!]\big) \\
&= \big(y(\emptyset) \wedge [\![\{\emptyset^{1,3}\} = \emptyset]\!]\big) \vee \big(y(\{\emptyset^{1,2,3}\}) \wedge [\![\{\emptyset^{1,3}\} = \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!]\big) \\
&= (\{1,3\} \wedge \{2\}) \vee (\{1,2,3\} \wedge \{1,3\}) \\
&= \{1,3\} \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![\emptyset \in x]\!] &= \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(x)} (x(u) \wedge [\![\emptyset = u]\!]) \\
&= (x(\emptyset) \wedge [\![\emptyset = \emptyset]\!]) \vee \big(x(\{\emptyset^{1,3}\}) \wedge [\![\emptyset = \{\emptyset^{1,3}\}]\!]\big) \\
&= (\{2,3\} \wedge \{1,2,3\}) \vee (\{1,3\} \wedge \{2\}) \\
&= \{2,3\} \qquad (5.3) \\
[\![\{\emptyset^{1,2,3}\} \in x]\!] &= \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(x)} \big(x(u) \wedge [\![\{\emptyset^{1,2,3}\} = u]\!]\big) \\
&= \big(x(\emptyset) \wedge [\![\{\emptyset^{1,2,3}\} = \emptyset]\!]\big) \vee \big(x(\{\emptyset^{1,3}\}) \wedge [\![\{\emptyset^{1,2,3}\} = \{\emptyset^{1,3}\}]\!]\big) \\
&= (\{2,3\} \wedge \{\}) \vee (\{1,3\} \wedge \{1,3\}) \\
&= \{1,3\} \qquad (5.4) \\
[\![x \subseteq \emptyset]\!] &= \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} (x(u) \to [\![u \in \emptyset]\!]) \\
&= (x(\emptyset) \to [\![\emptyset \in \emptyset]\!]) \wedge (x(\{\emptyset^{1,3}\}) \to [\![\{\emptyset^{1,3}\} \in \emptyset]\!]) \\
&= (\{2,3\} \to \emptyset) \wedge (\{1,3\} \to \emptyset) \\
&= \{1\} \wedge \{2\} \\
&= \emptyset \qquad (5.5) \\
[\![x = \emptyset]\!] &= [\![x \subseteq \emptyset]\!] \wedge [\![\emptyset \subseteq x]\!] \\
&\overset{(5.5)}{\underset{(5.5)}{=}} \{\} \wedge \{1,2,3\} \\
&= \emptyset \qquad (5.6) \\
[\![x \subseteq \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!] &= \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \big(x(u) \to [\![u \in \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!]\big) \\
&= (x(\emptyset) \to [\![\emptyset \in \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!]) \wedge (x(\{\emptyset^{1,3}\}) \to [\![\{\emptyset^{1,3}\} \in \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!]) \\
&= (\{2,3\} \to \{1,2,3\}) \wedge (\{1,3\} \to \{2\}) \\
&= \{1,2,3\} \wedge \{2\} \\
&= \{2\} \qquad (5.7) \\
[\![\{\emptyset^{1,2,3}\} \subseteq x]\!] &= \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(\{\emptyset^{1,2,3}\})} \big(\{\emptyset^{1,2,3}\}(u) \to [\![u \in x]\!]\big) \\
&= \{\emptyset^{1,2,3}\}(\emptyset) \to [\![\emptyset \in x]\!]) \\
&\overset{(5.3)}{=} \{1,2,3\} \to \{2,3\} \\
&= \{2,3\} \qquad (5.8) \\
[\![x = \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!] &= [\![x \subseteq \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!] \wedge [\![\{\emptyset^{1,2,3}\} \subseteq x]\!] \\
&\overset{(5.7)}{\underset{(5.8)}{=}} \{2\} \wedge \{2,3\} \\
&= \{2\} \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
[\![x \in y]\!] &= \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(y)} (y(v) \wedge [\![x = v]\!]) \\
&= (y(\emptyset) \wedge [\![x = \emptyset]\!]) \vee \big(y(\{\emptyset^{1,2,3}\}) \wedge [\![x = \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!]\big) \\
&= (\{1,3\} \wedge [\![x = \emptyset]\!]) \vee \big(\{1,2,3\} \wedge [\![x = \{\emptyset^{1,2,3}\}]\!]\big) \\
&\overset{(5.6)}{\underset{(5.9)}{=}} (\{1,3\} \wedge \emptyset) \vee (\{1,2,3\} \wedge \{2\}) \\
&= \emptyset \vee \{2\} \\
&= \{2\} \\
[\![x \subseteq y]\!] &= \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} (x(u) \to [\![u \in y]\!]) \\
&= (x(\emptyset) \to [\![\emptyset \in y]\!]) \wedge (x(\{\emptyset^{1,3}\}) \to [\![\{\emptyset^{1,3}\} \in y]\!]) \\
&= (\{2,3\} \to [\![\emptyset \in y]\!]) \wedge (\{1,3\} \to [\![\{\emptyset^{1,3}\} \in y]\!]) \\
&\overset{(5.1)}{\underset{(5.2)}{=}} (\{2,3\} \to \{1,3\}) \wedge (\{1,3\} \to \{1,3\}) \\
&= (\{1\} \vee \{1,3\}) \wedge (\{2\} \vee \{1,3\}) \\
&= \{1,3\} \wedge \{1,2,3\} \\
&= \{1,3\} \qquad (5.10) \\
[\![y \subseteq x]\!] &= \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(y)} (y(v) \to [\![v \in x]\!]) \\
&= (y(\emptyset) \to [\![\emptyset \in x]\!]) \wedge (y(\{\emptyset^{1,2,3}\}) \to [\![\{\emptyset^{1,2,3}\} \in x]\!]) \\
&= (\{1,3\} \to [\![\emptyset \in x]\!]) \wedge (\{1,2,3\} \to [\![\{\emptyset^{1,2,3}\} \in x]\!]) \\
&\overset{(5.3)}{\underset{(5.4)}{=}} (\{1,3\} \to \{2,3\}) \wedge (\{1,2,3\} \to \{1,3\}) \\
&= (\{2\} \vee \{2,3\}) \wedge (\{\} \vee \{1,3\}) \\
&= \{2,3\} \wedge \{1,3\} \\
&= \{3\} \qquad (5.11) \\
[\![x \subseteq y]\!] &= [\![x \subseteq y]\!] \wedge [\![y \subseteq x]\!] \\
&\overset{(5.10)}{\underset{(5.11)}{=}} \{1,3\} \wedge \{3\} \\
&= \{3\}
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 5.2

1. $B = \{0\}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}_0^{(B)} &= \emptyset \\
\mathrm{V}_1^{(B)} &= \{\emptyset\} \\
\mathrm{V}_2^{(B)} &= \{\emptyset, \{(\emptyset, 0)\}\} \\
\mathrm{V}_3^{(B)} &= \{\emptyset, \\
&\qquad \{(\emptyset, 0)\}, \\
&\qquad \{(\{(\emptyset, 0)\}, 0)\}, \\
&\qquad \{(\emptyset, 0), (\{(\emptyset, 0)\}, 0)\}\}
\end{aligned}
$$

2. $B = \{0, 1\}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}_0^{(B)} &= \emptyset \\
\mathrm{V}_1^{(B)} &= \{\emptyset\} \\
\mathrm{V}_2^{(B)} &= \{\emptyset, \{(\emptyset, 0)\}, \{(\emptyset, 1)\}\} \\
\mathrm{V}_3^{(B)} &= \{\emptyset, \\
&\qquad \{(\emptyset, 0)\}, \\
&\qquad \{(\emptyset, 1)\} \\
&\qquad \{(\{(\emptyset, 0)\}, 0)\}, \\
&\qquad \{(\{(\emptyset, 0)\}, 1)\}, \\
&\qquad \{(\{(\emptyset, 1)\}, 0)\}, \\
&\qquad \{(\{(\emptyset, 1)\}, 1)\}, \\
&\qquad \{(\emptyset, 0), (\{(\emptyset, 0)\}, 0)\}, \\
&\qquad \{(\emptyset, 0), (\{(\emptyset, 0)\}, 1)\}, \\
&\qquad \{(\emptyset, 1), (\{(\emptyset, 0)\}, 0)\}, \\
&\qquad \{(\emptyset, 1), (\{(\emptyset, 0)\}, 1)\}, \\
&\qquad \{(\emptyset, 0), (\{(\emptyset, 1)\}, 0)\}, \\
&\qquad \{(\emptyset, 0), (\{(\emptyset, 1)\}, 1)\}, \\
&\qquad \{(\emptyset, 1), (\{(\emptyset, 1)\}, 0)\}, \\
&\qquad \{(\emptyset, 1), (\{(\emptyset, 1)\}, 1)\}, \\
&\qquad \{(\{(\emptyset, 0)\}, 0), (\{(\emptyset, 1)\}, 0)\}, \\
&\qquad \{(\{(\emptyset, 0)\}, 0), (\{(\emptyset, 1)\}, 1)\}, \\
&\qquad \{(\{(\emptyset, 0)\}, 1), (\{(\emptyset, 1)\}, 0)\}, \\
&\qquad \{(\{(\emptyset, 0)\}, 1), (\{(\emptyset, 1)\}, 1)\},
\end{aligned}
$$

$$\{(\emptyset,0),(\{(\emptyset,0)\},0),(\{(\emptyset,1)\},0)\},$$
$$\{(\emptyset,0),(\{(\emptyset,0)\},0),(\{(\emptyset,1)\},1)\},$$
$$\{(\emptyset,0),(\{(\emptyset,0)\},1),(\{(\emptyset,1)\},0)\},$$
$$\{(\emptyset,0),(\{(\emptyset,0)\},1),(\{(\emptyset,1)\},1)\},$$
$$\{(\emptyset,1),(\{(\emptyset,0)\},0),(\{(\emptyset,1)\},0)\},$$
$$\{(\emptyset,0),(\{(\emptyset,0)\},0),(\{(\emptyset,1)\},1)\},$$
$$\{(\emptyset,1),(\{(\emptyset,0)\},1),(\{(\emptyset,1)\},0)\},$$
$$\{(\emptyset,1),(\{(\emptyset,0)\},1),(\{(\emptyset,1)\},1)\}\}$$

Lösung zu Aufgabe 5.3

(5.180) ist lediglich eine Umformulierung der ursprünglichen Definition unter Verwendung der Potenzmenge. (5.181) ist ebenfalls zur ursprünglichen Definition äquivalent, was folgendermaßen einzusehen ist: Ist f eine Funktion von A nach B, so ist $\mathcal{P}(f)$ die Menge aller partiellen Funktionen von A nach B.

Ein Element von (5.182) ist eine Menge von Funktionen, während ein Element von (5.180) oder (5.181) eine Funktion ist. Damit ist die Menge (5.182) etwas völlig anderes.

Lösung zu Aufgabe 5.4

Wenn wir innerhalb von $\mathcal{M}$ arbeiten, so bedeutet beispielsweise die Beziehung $x \in \mathcal{M}_{\alpha+1}^{(B)}$ aufgrund von (5.9) das Folgende:

$$x \in \mathcal{M} \text{ ist eine Funktion}^{\mathcal{M}} \text{ der Form } A \to B \text{ mit } A \subseteq^{\mathcal{M}} \mathcal{M}_{\alpha}^{(B)}$$

Die Begriffe „*Funktion*“ sowie die Teilmengenrelation ‚$\subseteq$‘ sind also mit ihrer jeweiligen Bedeutung in $\mathcal{M}$ zu interpretieren. Wir wissen aus Abschnitt 3.4.3, dass $\mathcal{M}$ ein Standardmodell ist und sowohl der Begriff der Funktion als auch die Teilmengenbeziehung in Standardmodellen absolute Eigenschaften sind. Dass bedeutet, dass wir die obige Aussage umschreiben können, in:

$$x \in \mathcal{M} \text{ ist eine Funktion der Form } A \to B \text{ mit } A \subseteq \mathcal{M}_{\alpha}^{(B)}$$

Für die Argumentation ist demnach entscheidend, dass $\mathcal{M}$ ein Standardmodell ist und sowohl der Begriff der Funktion als auch der Begriff der Teilmenge absolut sind, d. h. in allen Standardmodellen die gleiche Bedeutung besitzen. Die Absolutheit erlaubt uns, die formulierte Eigenschaft, die zunächst nur innerhalb von $\mathcal{M}$ sichergestellt ist, ohne eine semantische Veränderung auf die Meta-Ebene zu übertragen, die $\mathcal{M}$ von außen betrachtet.

Lösung zu Aufgabe 5.5

$$\begin{aligned}
[\![\varphi \vee \psi]\!] \ &\overset{(3.3)}{=} [\![\neg\varphi \to \psi]\!] \\
&\overset{(5.18)}{=} [\![\neg\varphi]\!] \to [\![\psi]\!] \\
&\overset{(5.17)}{=} \neg[\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!] \\
&\overset{(4.39)}{=} [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!] \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\varphi \wedge \psi]\!] \ &\overset{(3.4)}{=} [\![\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)]\!] \\
&\overset{(5.17)}{=} \neg[\![\neg\varphi \vee \neg\psi]\!] \\
&\overset{(5.12)}{=} \neg([\![\neg\varphi]\!] \vee [\![\neg\psi]\!]) \\
&\overset{(5.17)}{=} \neg(\neg[\![\varphi]\!] \vee \neg[\![\psi]\!]) \\
&\overset{(4.36)}{=} [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!] \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\varphi \leftrightarrow \psi]\!] \ &\overset{(3.5)}{=} [\![(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)]\!] \\
&\overset{(5.13)}{=} [\![\varphi \to \psi]\!] \wedge [\![\psi \to \varphi]\!] \\
&\overset{(5.18)}{=} ([\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!]) \wedge ([\![\psi]\!] \to [\![\varphi]\!]) \\
&\overset{(4.40)}{=} [\![\varphi]\!] \leftrightarrow [\![\psi]\!]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\exists \mathsf{x}\, \varphi(\mathsf{x})]\!] \ &\overset{(3.8)}{=} [\![\neg\forall \mathsf{x}\, \neg\varphi(\mathsf{x})]\!] \\
&\overset{(5.17)}{=} \neg[\![\forall \mathsf{x}\, \neg\varphi(\mathsf{x})]\!] \\
&\overset{\substack{(5.19)\\(5.17)}}{=} \neg \bigwedge_{x \in \mathrm{V}^{(B)}} \neg[\![\varphi(x)]\!] \\
&\overset{(4.77)}{=} \bigvee_{x \in \mathrm{V}^{(B)}} \neg\neg[\![\varphi(x)]\!] \\
&\overset{(4.32)}{=} \bigvee_{x \in \mathrm{V}^{(B)}} [\![\varphi(x)]\!]
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.6

Die Definition besagt, dass der Wahrheitswert der Formel $[\![\forall \mathsf{x}\, \varphi(\mathsf{x})]\!]^{\mathrm{V}^{(B)}}$ das Infimum der folgenden Menge ist:

$$\{[\![\varphi(x)]\!]^{\mathrm{V}^{(B)}} \mid x \in \mathrm{V}^{(B)}\}$$

Diese Menge ist eine Teilmenge von B, die sich aus B durch Separation erzeugen lässt:

$$\{b \in B \mid \text{Es existiert eine Menge } x \text{ mit } b = [\![\varphi(x)]\!]\} \qquad (5.14)$$

Das bedeutet, dass für die Definition des Wahrheitswerts gar kein direkter Bezug auf die Klasse $\mathrm{V}^{(B)}$ notwendig ist.

Lösung zu Aufgabe 5.7

$$\begin{aligned}
[\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!] &\Leftrightarrow [\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!] \text{ und } [\![\psi]\!] \leq [\![\varphi]\!] \\
&\overset{(4.54)}{\Leftrightarrow} [\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!] = 1 \text{ und } [\![\psi]\!] \to [\![\varphi]\!] = 1 \\
&\overset{(4.244)}{\Leftrightarrow} ([\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!]) \wedge ([\![\psi]\!] \to [\![\varphi]\!]) = 1 \\
&\Leftrightarrow [\![(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)]\!] = 1 \\
&\overset{(4.40)}{\Leftrightarrow} [\![\varphi \leftrightarrow \psi]\!] = 1
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.8

a) Für alle $u \in \mathrm{dom}(x)$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\overset{(4.69)}{\Rightarrow} \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \geq \Big(x(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \text{ für alle } v \in \mathrm{dom}(x) \\
&\Rightarrow \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \geq \Big(x(u) \wedge [\![u = u]\!] \Big) \\
&\overset{(4.45)}{\Rightarrow} \neg x(u) \vee \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \geq \neg x(u) \vee \Big(x(u) \wedge [\![u = u]\!] \Big) \\
&\overset{(4.39)}{\Rightarrow} x(u) \to \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \geq x(u) \to \Big(x(u) \wedge [\![u = u]\!] \Big)
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung mit (4.256).

b) Nein, da der erste Operand einer Implikation negiert in die Disjunktion eingeht ($a \to b = \neg a \vee b$), erfolgt ein Vorzeichenwechsel:

$$\begin{aligned}
&\overset{(4.69)}{\Rightarrow} \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \geq \Big(x(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \text{ für alle } v \in \mathrm{dom}(x) \\
&\Rightarrow \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \geq \Big(x(u) \wedge [\![u = u]\!] \Big) \\
&\overset{(4.47)}{\Rightarrow} \neg \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \leq \neg \Big(x(u) \wedge [\![u = u]\!] \Big) \\
&\overset{(4.46)}{\Rightarrow} \neg \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \vee x(u) \leq \neg \Big(x(u) \wedge [\![u = u]\!] \Big) \vee x(u)
\end{aligned}$$

$$\overset{(4.39)}{\Rightarrow} \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(v) \wedge [\![u = v]\!]\Big) \to x(u) \leq \Big(x(u) \wedge [\![u = u]\!]\Big) \to x(u)$$

Lösung zu Aufgabe 5.9

Die Beziehung gilt nicht. Beispielsweise erhalte wir für die Menge

$$x := \{\emptyset^1, \{\emptyset^3\}^{2,3}\} \;=\; \begin{cases} 1 : \{\emptyset\} \\ 2 : \{\emptyset\} \\ 3 : \{\{\emptyset\}\} \end{cases}$$

die folgende Menge y:

$$y := \{\emptyset^{2,3}, \{\emptyset^1\}^1\} \;=\; \begin{cases} 1 : \{\{\emptyset\}\} \\ 2 : \{\emptyset\} \\ 3 : \{\emptyset\} \end{cases}$$

Für diese beiden Mengen gilt:

$$[\![x = y]\!] = \{2\}$$

Lösung zu Aufgabe 5.10

a) Wir können die Beziehung schrittweise herstellen, indem wir mit der ersetzten Teilformel beginnen und die anderen Formelbestandteile schrittweise hinzufügen:

$$\begin{aligned} &\vdash_{\mathrm{PL0}} (\mathsf{x} \to \mathsf{y}) \leftrightarrow (\neg\mathsf{y} \to \neg\mathsf{x}) \\ &\overset{(5.49)}{\Rightarrow} [\![\mathsf{x} \to \mathsf{y}]\!] = [\![\neg\mathsf{y} \to \neg\mathsf{x}]\!] \\ &\Rightarrow [\![\mathsf{x}]\!] \to [\![\mathsf{x} \to \mathsf{y}]\!] = [\![\mathsf{x}]\!] \to [\![\neg\mathsf{y} \to \neg\mathsf{x}]\!] \\ &\Rightarrow [\![\mathsf{x} \to (\mathsf{x} \to \mathsf{y})]\!] = [\![\mathsf{x} \to (\neg\mathsf{y} \to \neg\mathsf{x})]\!] \end{aligned}$$

b) Nein. Beispielsweise folgt aus

$$\vdash_{\mathrm{PL0}} \mathsf{x} \to \mathsf{1} \tag{5.15}$$

mit (5.48) die Beziehung

$$[\![\mathsf{x}]\!] \leq [\![1]\!].$$

Dürften wir diese Ungleichung als Ersetzungsregel auf beliebige Teilformeln anwenden, so könnten wir damit die Beziehung

$$[\![\mathsf{x} \to \varphi]\!] \leq [\![\mathsf{1} \to \varphi]\!]$$

herleiten. Es ist aber

$$[\![\mathsf{x} \to \varphi]\!] \geq [\![\mathsf{1} \to \varphi]\!].$$

Der Fehler entsteht, weil die ausgetauschte Formel auf der linke Seite einer Implikation und damit negiert in der Formel vorkommt. Die folgende Schlusskette macht deutlich, wie wir korrekt argumentieren müssen:

$$\begin{aligned}
\vdash_{\mathrm{PL0}} \mathsf{x} \to \mathsf{1} \quad &\underset{(5.48)}{\Rightarrow} [\![\mathsf{x}]\!] \leq [\![\mathsf{1}]\!] \\
&\underset{(4.47)}{\Rightarrow} \neg[\![\mathsf{x}]\!] \geq \neg[\![\mathsf{1}]\!] \\
&\Rightarrow \neg[\![\mathsf{x}]\!] \vee [\![\varphi]\!] \geq \neg[\![\mathsf{1}]\!] \vee [\![\varphi]\!] \\
&\Rightarrow [\![\neg\mathsf{x} \vee \varphi]\!] \geq [\![\neg\mathsf{1} \vee \varphi]\!] \\
&\Rightarrow [\![\mathsf{x} \to \varphi]\!] \geq [\![\mathsf{1} \to \varphi]\!]
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.11

a) Ist z mit x identisch, dann ist die Beziehung (5.59) falsch. In diesem Fall können wir die angewendete Substitution der freien Vorkommen von x nicht hinter den Allquantor ziehen.

Ist z mit y identisch, so bleibt uns die Anwendung von (4.262) verwehrt, da der Wert des Ausdrucks $[\![x = y]\!]$ innerhalb der großen Konjunktion dann durch die Laufvariable y beeinflusst wird.

b) Wir wählen für φ die Formel $\exists\,\mathsf{y}\ \mathsf{y} \neq \mathsf{x}$. Dann gilt:

$$[\![\mathsf{x} = \mathsf{y} \to (\varphi \to \varphi[\mathsf{x} \leftarrow \mathsf{y}])]\!] = [\![\mathsf{x} = \mathsf{y}]\!] \to \underbrace{[\![(\exists\,\mathsf{y}\ \mathsf{y} \neq \mathsf{x} \to \exists\,\mathsf{y}\ \mathsf{y} \neq \mathsf{y}]\!]}_{=0} = \neg[\![\mathsf{x} = \mathsf{y}]\!]$$

Dieser Ausdruck ist im Allgemeinen von 1 verschieden und z. B. immer dann gleich 0, wenn x und y als die gleiche Menge interpretiert werden.

Lösung zu Aufgabe 5.12

Ein Erweiterung des Idempotenzgesetzes auf unendliche Mengen ergibt keinen Sinn, da es keine Menge gibt, die unendlich oft das gleiche Element enthält. Die Umformung ist dadurch legitimiert, dass sich die Disjunktion in dem gezeigten Fall gar nicht auf eine unendliche, sondern eine einelementige Menge bezieht:

$$\begin{aligned}
\bigvee_{z \in \mathcal{M}^{(B)}} [\![\varphi(x)]\!] &= \sup\{\, [\![\varphi(x)]\!] \mid z \in \mathcal{M}^{(B)} \} \\
&= \sup\{\, [\![\varphi(x)]\!] \,\} = [\![\varphi(x)]\!]
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.13

Mit Korollar 5.15 können wir aus

$$\vdash_{\mathrm{PL1}} \mathsf{x} = \mathsf{z}_1 \wedge \mathsf{y} = \mathsf{z}_2 \wedge \varphi(\mathsf{z}_1, \mathsf{z}_2) \rightarrow \varphi(\mathsf{x}, \mathsf{y})$$

die Beziehung

$$[\![\mathsf{x} = \mathsf{z}_1 \wedge \mathsf{y} = \mathsf{z}_2 \wedge \varphi(\mathsf{z}_1, \mathsf{z}_2) \rightarrow \varphi(\mathsf{x}, \mathsf{y})]\!] = 1$$

herleiten, die nach (4.54) das Gleiche ist wie:

$$[\![x = z_1 \wedge y = z_2 \wedge \varphi(z_1, z_2)]\!] \leq [\![\varphi(x, y)]\!] \text{ für alle } x, y, z_1, z_2 \in \mathcal{M}^{(B)} \tag{5.16}$$

1. Beweis von (5.188)

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{z_1, z_2 \in \mathcal{M}^{(B)}} [\![x = z_1 \wedge y = z_2 \wedge \varphi(z_1, z_2)]\!] \\
\overset{(5.16)}{\leq} &\bigvee_{z_1, z_2 \in \mathcal{M}^{(B)}} [\![\varphi(x, y)]\!] \\
= &\ [\![\varphi(x, y)]\!]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{z_1, z_2 \in \mathcal{M}^{(B)}} [\![x = z_1 \wedge y = z_2 \wedge \varphi(z_1, z_2)]\!] \\
\overset{(4.69)}{\geq} &\ [\![x = x \wedge y = y \wedge \varphi(x, y)]\!] \\
\overset{(5.30)}{=} &\ [\![\varphi(x, y)]\!]
\end{aligned}$$

2. Beweis von (5.187)

$$\begin{aligned}
&\bigwedge_{z_1, z_2 \in \mathcal{M}^{(B)}} [\![x = z_1 \wedge y = z_2 \rightarrow \varphi(z_1, z_2)]\!] \\
\overset{(4.78)}{=} &\neg \bigvee_{z_1, z_2 \in \mathcal{M}^{(B)}} \neg [\![x = z_1 \wedge y = z_2 \rightarrow \varphi(z_1, z_2)]\!] \\
= &\neg \bigvee_{z_1, z_2 \in \mathcal{M}^{(B)}} [\![x = z_1 \wedge y = z_2 \wedge \neg\varphi(z_1, z_2)]\!] \\
\overset{(5.188)}{=} &\neg [\![\neg\varphi(z_1, z_2)]\!] = [\![\varphi(z_1, z_2)]\!]
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.14

Wir definieren die gesuchte Menge y folgendermaßen:

$$\mathrm{dom}(y) \ := \ \mathrm{dom}(x) \tag{5.17}$$

$$y(v) \;:=\; [\![v \in x]\!] \quad \text{für alle } v \in \mathrm{dom}(y) \tag{5.18}$$

1. Wir zeigen: $[\![x = y]\!] = 1$

$$\begin{aligned}
[\![x \subseteq y]\!] &\overset{(5.22)}{=} \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(u) \to [\![u \in y]\!] \Big) \\
&\overset{(5.20)}{=} \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(u) \to \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(y)} \Big(y(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \Big) \\
&\overset{(5.17)}{=} \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(u) \to \bigvee_{v \in \mathrm{dom}(x)} \Big(y(v) \wedge [\![u = v]\!] \Big) \Big) \\
&\geq \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(u) \to \Big(y(u) \wedge [\![u = u]\!] \Big) \Big) \\
&\overset{(5.18)}{\underset{(5.30)}{=}} \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(u) \to [\![u \in x]\!] \Big) \\
&\overset{(5.44)}{=} \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![y \subseteq x]\!] &= \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(y)} \Big(y(v) \to [\![v \in x]\!] \Big) \\
&\overset{(5.18)}{=} \bigwedge_{v \in \mathrm{dom}(y)} \Big([\![v \in x]\!] \to [\![v \in x]\!] \Big) \\
&= \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Wir zeigen: y ist extensional

   Für alle $v \in \mathrm{dom}(y)$ gilt:

$$\begin{aligned}
y(v) &\overset{(5.43)}{\leq} [\![v \in y]\!] \\
&\overset{(5.189)}{=} [\![v \in y \wedge x = y]\!] \\
&\overset{(5.66)}{\leq} [\![v \in x]\!] \\
&\overset{(5.18)}{=} y(v)
\end{aligned}$$

   Somit ist $y(v) = [\![v \in y]\!]$.

Hinweis: Dass die konstruierte Menge auch tatsächlich in $\mathcal{M}^{(B)}$ vorhanden ist, beruht auf einem Detail, dass sich sehr schnell übersehen lässt. Wir haben die Menge y auf der

Meta-Ebene konstruiert und daher noch keine Garantie, dass y ein Element von $\mathcal{M}^{(B)}$ ist. An dieser Stelle hilft uns die Voraussetzung weiter, dass die boolesche Algebra $(B, \wedge, \vee)$ in $\mathcal{M}$ enthalten ist. Damit lässt sich der Funktionswert $y(v) = [\![v \in x]\!]$ in $\mathcal{M}$ konstruieren und damit auch die gesamte Funktion y.

Lösung zu Aufgabe 5.15

---

a)

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{M} &\underset{(5.84)}{\Rightarrow} \check{x} \in \check{\mathcal{M}} \\ \check{x} \in \check{\mathcal{M}} &\underset{(5.84)}{\Rightarrow} \check{x} = \check{y} \text{ für ein } y \in \mathcal{M} \\ &\underset{(5.91)}{\Rightarrow} x = y \text{ für ein } y \in \mathcal{M} \\ &\Rightarrow x \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

b) Nein! Wir betrachten die auf Seite 306 definierten Mengen x_1, x_2 und x_3. Es gilt $x_1 \in x_2$ und $x_2 \in x_3$, aber weder $\check{x}_1 \in \check{x}_2$ noch $\check{x}_2 \in \check{x}_3$. Es gilt aber: $\check{x}_1 \in \mathrm{dom}(\check{x}_2)$ und $\check{x}_2 \in \mathrm{dom}(\check{x}_3)$.

Korrekt muss die Beziehungen folgendermaßen lauten:

$$u \in x \;\Leftrightarrow\; \check{u} \in \mathrm{dom}(\check{x})$$

Lösung zu Aufgabe 5.16

---

a) Die Richtung von rechts nach links ist trivial. Für die Richtung von links nach rechts sei $\bigvee A = 1$. Dann kann A nicht ausschließlich das Nullelement enthalten, sonst wäre $\bigvee A = 0$. Also muss das Einselement in A enthalten sein.

b) Ist $(B, \wedge, \vee)$ eine boolesche Algebra mit $B \neq \{0, 1\}$, dann hat B mehr als zwei Elemente. Dann existiert ein Element $b \in B$ mit der Eigenschaft $0 \neq b \neq 1$. Aufgrund der Eindeutigkeit der inversen Elemente gilt dann auch $0 \neq \neg b \neq 1$. Setzen wir $A := \{b, \neg b\}$, so ist $\bigvee A = 1$, aber $1 \notin A$.

Lösung zu Aufgabe 5.17

Wegen $y \neq z$ folgt aus Korollar 5.22 die Beziehung:

$$[\![\check{y} = \check{z}]\!] = 0 \tag{5.19}$$

Somit gilt:

$$[\![x = \check{y}]\!] \wedge [\![x = \check{z}]\!] = [\![x = \check{y} \wedge x = \check{z}]\!] \underset{(5.66)}{\leq} [\![\check{y} = \check{z}]\!] \underset{(5.19)}{=} 0$$

Lösung zu Aufgabe 5.18

Für alle $x \in V^{(2)}$ sei $\tilde{x}$ die folgende Menge:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\tilde{x}) &:= \{\tilde{u} \mid u \in \mathrm{dom}(x) \text{ und } x(u) = 1\} \\ \tilde{x}(\tilde{u}) &:= 1 \text{ für alle } \tilde{u} \in \mathrm{dom}(\tilde{x}) \end{aligned} \tag{5.20}$$

Wir beweisen die Behauptung, indem wir durch $\in$-Induktion über x die Beziehung

$$[\![x = \tilde{x}]\!] = 1 \tag{5.21}$$

zeigen. Als Induktionshypothese gelte für alle $u \in \mathrm{dom}(x)$:

$$[\![u = \tilde{u}]\!] = 1 \tag{5.22}$$

Wir beweisen (5.21) in drei Schritten:

1. Wir zeigen: $[\![u \in \tilde{x}]\!] \geq x(u)$ für alle $u \in \mathrm{dom}(x)$ (5.23)

   Sei $u \in \mathrm{dom}(x)$. Ist $x(u) = 0$, so ist die Behauptung trivialerweise wahr. Ist $x(u) \neq 0$, so gilt:

   $$x(u) = 1 \tag{5.24}$$
   $$\tilde{u} \in \mathrm{dom}(\tilde{x}) \tag{5.25}$$

   Daraus folgt:

   $$\begin{aligned} [\![u \in \tilde{x}]\!] &\overset{(5.20)}{=} \bigvee_{\tilde{w} \in \mathrm{dom}(\tilde{x})} \Big(\tilde{x}(\tilde{w}) \wedge [\![\tilde{w} = u]\!]\Big) \\ &\overset{(5.20)}{=} \bigvee_{\tilde{w} \in \mathrm{dom}(\tilde{x})} [\![\tilde{w} = u]\!] \\ &\overset{(5.25)}{\geq} [\![\tilde{u} = u]\!] \\ &\overset{(5.22)}{=} 1 \\ &\overset{(5.24)}{\geq} x(u) \end{aligned}$$

2. Wir zeigen: $[\![\tilde{u} \in x]\!] = 1$ für alle $\tilde{u} \in \mathrm{dom}(\tilde{x})$ (5.26)

   Sei $\tilde{u} \in \mathrm{dom}(\tilde{x})$. Dann ist

   $$u \in \mathrm{dom}(x) \tag{5.27}$$
   $$x(u) = 1 \tag{5.28}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
[\![\tilde{u} \in x]\!] &\overset{(5.20)}{=} \bigvee_{w \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(w) \wedge [\![w = \tilde{u}]\!] \Big) \\
&\overset{(5.27)}{\geq} x(u) \wedge [\![u = \tilde{u}]\!] \\
&\overset{(5.28)}{=} [\![u = \tilde{u}]\!] \\
&\overset{(5.22)}{=} 1
\end{aligned}$$

3. Wir zeigen: $[\![x = \tilde{x}]\!] = 1$

$$\begin{aligned}
[\![x = \tilde{x}]\!] &\overset{(5.21)}{\overset{(5.22)}{=}} \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(u) \to [\![u \in \tilde{x}]\!] \Big) \wedge \bigwedge_{\tilde{u} \in \mathrm{dom}(\tilde{x})} \Big(\tilde{x}(\tilde{u}) \to [\![\tilde{u} \in x]\!] \Big) \\
&\overset{(5.20)}{=} \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(u) \to [\![u \in \tilde{x}]\!] \Big) \wedge \bigwedge_{\tilde{u} \in \mathrm{dom}(\tilde{x})} [\![\tilde{u} \in x]\!] \\
&\overset{(5.23)}{\overset{(5.26)}{=}} \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} 1 \wedge \bigwedge_{\tilde{u} \in \mathrm{dom}(\tilde{x})} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.19

Nein, in der angegebenen Argumentationskette sind nur die Schlussrichtungen von links nach rechts durchgängig gültig. Von rechts nach links ist die Schlusskette beim Übergang von $\mathcal{M}^{(2)}$ nach $\check{\mathcal{M}}$ unterbrochen: Da $\check{\mathcal{M}}$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{M}^{(2)}$ ist, können wir aus $x \in \mathcal{M}^{(2)}$ nicht auf $x \in \check{\mathcal{M}}$ schließen.

Lösung zu Aufgabe 5.20

a) $\varphi(\mathsf{x}) \;:=\; \exists\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\; \exists\,(\mathsf{v} \in \mathsf{x})\; \mathsf{u} \neq \mathsf{v}$

b) Die Beziehung wird klar, wenn wir die Menge x ausführlicher aufschreiben:

$$x = \{\emptyset^{1,2,3}, \{\emptyset^1\}^{2,3}\} = \begin{cases} ^1 : \{\emptyset\} & = \{\emptyset\} \\ ^2 : \{\emptyset, \emptyset\} & = \{\emptyset\} \\ ^3 : \{\emptyset, \emptyset\} & = \{\emptyset\} \end{cases}$$

Damit können wir folgendes konstatieren: Von außen als gewöhnliche Menge betrachtet hat x zwei Elemente, da x_1 und x_2 verschieden sind. Wenn wir x von innen, d. h. als boolesche Menge betrachten, ist dies anders. In jeder Welt ist x eine Menge, die nur ein Element enthält.

c) $\check{x}$ ist die Standardrepräsentation der Menge x, wobei x dann nicht mehr als eine boolesche Menge, sondern als eine gewöhnliche Menge aus $\mathcal{M}$ betrachtet wird.

Durch die Einbettung wird diese Menge zu einer booleschen Menge, die in jeder Welt wieder zur Menge x wird. Damit ist $\check{x}$ in jeder Welt eine zweielementige Menge, und genau dies drückt die Beziehung $[\![\varphi(\check{x})]\!] = 1$ aus. Ein weiteres Mal wird deutlich, dass es einen Unterschied macht, ob wir eine Menge *von außen* als eine gewöhnliche Menge betrachten oder *von innen* als eine boolesche Menge.

Lösung zu Aufgabe 5.21

a)

$$\mathrm{dom}(\{x\}^B) = \{x\} \tag{5.29}$$

$$\mathrm{dom}(\{x,y\}^B) = \{x,y\} \tag{5.30}$$

$$\mathrm{dom}((x,y)^B) = \{\{x\}^B, \{x,y\}^B\} \tag{5.31}$$

b)

$$\begin{aligned}
[\![a \in \{x\}^B]\!] &\overset{(5.20)}{\underset{(5.113)}{=}} \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(\{x\}^B)} [\![u = a]\!] \\
&\overset{(5.29)}{=} [\![x = a]\!]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![a \in \{x,y\}^B]\!] &\overset{(5.20)}{\underset{(5.113)}{=}} \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(\{x,y\}^B)} [\![u = a]\!] \\
&\overset{(5.30)}{\underset{(5.29)}{=}} [\![x = a]\!] \vee [\![y = a]\!] \\
&= [\![x = a \vee y = a]\!]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\{x\}^B = \{x,y\}^B]\!] &\overset{(5.21)}{\underset{(5.113)}{=}} \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(\{x\}^B)} [\![u \in \{x,y\}^B]\!] \wedge \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(\{x,y\}^B)} [\![u \in \{x\}^B]\!] \\
&\overset{(5.29)}{\underset{(5.30)}{=}} [\![x \in \{x,y\}^B]\!] \wedge \big([\![x \in \{x\}^B]\!] \wedge [\![y \in \{x\}^B]\!]\big) \\
&\overset{(5.194)}{=} [\![x = x \vee x = y]\!] \wedge [\![x = x]\!] \wedge [\![y = x]\!] \\
&\overset{(5.30)}{\underset{(5.31)}{=}} [\![x = y]\!]
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
[\![\mathfrak{Set}(\{x\}^B, a)]\!] &\overset{(3.32)}{=} [\![a \in \{x\}^B \wedge \forall\, (\mathsf{u} \in \{x\}^B)\ \mathsf{u} = a]\!] \\
&\overset{(5.20)}{\underset{(5.72)}{=}} \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(\{x\}^B)} [\![u = a]\!] \wedge \\
&\qquad \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(\{x\}^B)} [\![u = a]\!]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(5.29)}{=} [\![x = a]\!] \wedge [\![x = a]\!] \\
&= [\![x = a]\!]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![\mathfrak{Set}(\{x,y\}^B, a)]\!] &\overset{(3.32)}{=} [\![a \in \{x,y\}^B \wedge \forall\, (\mathsf{u} \in \{x,y\}^B)\ \mathsf{u} = a]\!] \\
&\overset{\substack{(5.20)\\(5.72)}}{=} \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(\{x,y\}^B)} [\![u = a]\!] \wedge \\
&\qquad \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(\{x,y\}^B)} [\![u = a]\!] \\
&\overset{(5.29)}{=} ([\![x = a]\!] \vee [\![y = a]\!]) \wedge [\![x = a]\!] \wedge [\![y = a]\!] \\
&= [\![x = a \wedge y = a]\!]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![\mathfrak{Set}(\{x\}^B, a, b)]\!] &\overset{(3.33)}{=} [\![a \in \{x\}^B \wedge b \in \{x\}^B \wedge \forall\, (\mathsf{u} \in \{x\}^B)\ (u = a \vee u = b)]\!] \\
&\overset{\substack{(5.20)\\(5.72)}}{=} \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(\{x\}^B)} [\![u = a]\!] \wedge \\
&\qquad \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(\{x\}^B)} [\![u = b]\!] \wedge \\
&\qquad \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(\{x\}^B)} [\![u = a \vee u = b]\!] \\
&\overset{(5.29)}{=} [\![x = a]\!] \wedge [\![x = b]\!] \wedge [\![x = a \vee x = b]\!] \\
&= [\![x = a \wedge y = b]\!]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![\mathfrak{Set}(\{x,y\}^B, a, b)]\!] &\overset{(3.33)}{=} [\![a \in \{x,y\}^B \wedge b \in \{x,y\}^B \wedge \forall\, (\mathsf{u} \in \{x,y\}^B)\ (u = a \vee u = b)]\!] \\
&\overset{\substack{(5.20)\\(5.72)}}{=} \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(\{x,y\}^B)} [\![u = a]\!] \wedge \\
&\qquad \bigvee_{u \in \mathrm{dom}(\{x,y\}^B)} [\![u = b]\!] \wedge \\
&\qquad \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(\{x,y\}^B)} [\![u = a \vee u = b]\!] \\
&\overset{\substack{(5.113)\\(5.30)}}{=} ([\![x = a]\!] \vee [\![y = a]\!]) \wedge ([\![x = b]\!] \vee [\![y = b]\!]) \wedge \\
&\qquad ([\![x = a \vee x = b]\!] \wedge [\![y = a \vee y = b]\!]) \\
&= [\![(x = a \vee y = a) \wedge (x = b \vee y = b) \wedge \\
&\qquad (x = a \vee x = b) \wedge (y = a \vee y = b)]\!] \\
&= [\![(x = a \vee (y = a \wedge x = b)) \wedge ((x = b \wedge y = a) \vee y = b)]\!] \\
&= [\![(x = a \vee (x = b \wedge y = a)) \wedge (y = b \vee (x = b \wedge y = a))]\!] \\
&= [\![(x = a \wedge y = b) \vee (x = b \wedge y = a)]\!]
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&[\![\mathfrak{Set}((x,y)^B,\{x\}^B,\{x\}^B)]\!]\\
\overset{(5.114)}{=}\ &[\![\mathfrak{Set}(\{\{x\}^B,\{x,y\}^B\}^B,\{x\}^B,\{x\}^B)]\!]\\
\overset{(5.200)}{=}\ &[\![\{x\}^B=\{x\}^B\wedge\{x,y\}^B=\{x\}^B]\!]\vee\\
&\quad[\![\{x\}^B=\{x\}^B\wedge\{x,y\}^B=\{x\}^B]\!]\\
=\ &[\![\{x,y\}^B=\{x\}^B]\!]\\
\overset{(5.196)}{=}\ &[\![x=y]\!]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\![\mathfrak{Set}((x,y)^B,\{x\}^B,\{x,y\}^B)]\!]\\
\overset{(5.114)}{=}\ &[\![\mathfrak{Set}(\{\{x\}^B,\{x,y\}^B\}^B,\{x\}^B,\{x,y\}^B)]\!]\\
\overset{(5.200)}{=}\ &[\![\{x\}^B=\{x\}^B\wedge\{x,y\}^B=\{x,y\}^B]\!]\vee\\
&\quad[\![\{x\}^B=\{x,y\}^B\wedge\{x,y\}^B=\{x\}^B]\!]\\
=\ &1
\end{aligned}
$$

Der Beweis von (5.203) gelingt analog zu (5.202) und der Beweis von (5.204) analog zu (5.201).

e)

$$
\begin{aligned}
&[\![(x,y)^B=\langle a,b\rangle]\!]\\
=\ &[\![\mathfrak{Pair}((x,y)^B,a,b)]\!]\\
\overset{(3.34)}{=}\ &[\![\exists\,(\mathsf{v}\in(x,y)^B)\ \exists\,(\mathsf{w}\in(x,y)^B)\\
&\quad(\mathfrak{Set}(\mathsf{v},a)\wedge\mathfrak{Set}(\mathsf{w},a,b)\wedge\mathfrak{Set}((x,y)^B,\mathsf{v},\mathsf{w}))]\!]\\
\overset{(5.29)\ (5.113)}{=}\ &\bigvee_{v,w\in\mathrm{dom}((x,y)^B)}[\![\mathfrak{Set}(v,a)\wedge\mathfrak{Set}(w,a,b)\wedge\mathfrak{Set}((x,y)^B,v,w)]\!]\\
\overset{(5.31)}{=}\ &\bigvee_{v,w\in\{\{x\}^B,\{x,y\}^B\}}[\![\mathfrak{Set}(v,a)\wedge\mathfrak{Set}(w,a,b)\wedge\mathfrak{Set}((x,y)^B,v,w)]\!]\\
=\ &[\![\mathfrak{Set}(\{x\}^B,a)\wedge\mathfrak{Set}(\{x\}^B,a,b)\wedge\mathfrak{Set}((x,y)^B,\{x\}^B,\{x\}^B)]\!]\vee\\
&[\![\mathfrak{Set}(\{x\}^B,a)\wedge\mathfrak{Set}(\{x,y\}^B,a,b)\wedge\mathfrak{Set}((x,y)^B,\{x\}^B,\{x,y\}^B)]\!]\vee\\
&[\![\mathfrak{Set}(\{x,y\}^B,a)\wedge\mathfrak{Set}(\{x\}^B,a,b)\wedge\mathfrak{Set}((x,y)^B,\{x,y\}^B,\{x\}^B)]\!]\vee\\
&[\![\mathfrak{Set}(\{x,y\}^B,a)\wedge\mathfrak{Set}(\{x,y\}^B,a,b)\wedge\mathfrak{Set}((x,y)^B,\{x,y\}^B,\{x,y\}^B)]\!]\vee\\
=\ &[\![\mathfrak{Set}(\{x\}^B,a)\wedge\mathfrak{Set}(\{x\}^B,a,b)\wedge x=y]\!]\vee\\
&[\![\mathfrak{Set}(\{x\}^B,a)\wedge\mathfrak{Set}(\{x,y\}^B,a,b)\wedge 1]\!]\vee\\
&[\![\mathfrak{Set}(\{x\}^B,a)\wedge\mathfrak{Set}(\{x,y\}^B,a,b)\wedge 1]\!]\vee\\
&[\![\mathfrak{Set}(\{x,y\}^B,a)\wedge\mathfrak{Set}(\{x,y\}^B,a,b)\wedge x=y]\!]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [\![x = a \wedge x = b \wedge x = y]\!] \vee \\
&\quad [\![x = a \wedge ((x = a \wedge y = b) \vee (x = b \wedge y = a))]\!] \vee \\
&\quad [\![x = a \wedge y = a \wedge ((x = a \wedge y = b) \vee (x = b \wedge y = a)) \wedge x = y]\!] \\
&= [\![x = a \wedge y = b \wedge x = y]\!] \vee \\
&\quad [\![x = a \wedge y = b]\!] \vee \\
&\quad [\![x = a \wedge y = b \wedge x = y]\!] \\
&= [\![x = a \wedge y = b]\!]
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 5.22

a)

$$x_1 = \begin{cases} 1 : \emptyset \\ 2 : \{\emptyset\} \\ 3 : \{\{\emptyset\}\} \end{cases} \qquad x_2 = \begin{cases} 1 : \{\emptyset\} \\ 2 : \{\emptyset\} \\ 3 : \{\emptyset\} \end{cases} \qquad x_3 = \begin{cases} 1 : \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 2 : \{\{\emptyset\}\} \\ 3 : \{\emptyset\} \end{cases}$$

b) Wir erhalten die Menge x, indem wir die Mengen x_1, x_2 und x_3 geeignet mischen:

$$x := \{\{\emptyset^{2,3}\}^{2,3}\} \qquad x = \begin{cases} 1 : \emptyset \\ 2 : \{\emptyset\} \\ 3 : \{\emptyset\} \end{cases}$$

c) Nachgerechnet erhalten wir das folgende Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
[\![x = x_1]\!] &= \{1, 2\} \\
[\![x = x_2]\!] &= \{2, 3\} \\
[\![x = x_3]\!] &= \{3\}
\end{aligned}
$$

Die Gleichheit ist nur im dritten Fall gegeben. Der Grund ist leicht zu finden: Die Konstruktion stellt sicher, dass x *mindestens* in Welt 1 mit x_1, *mindestens* in Welt 2 mit x_2 und *mindestens* in Welt 3 mit x übereinstimmt. Es kann, wie hier, aber auch möglich sein, dass die Übereinstimmung „zufällig“ noch größer ist als es die Konstruktion garantiert.

d) Nein. Die Wahl der a_i fordert, dass die Menge x in Welt 1 und 3 mit x_1, in Welt 2 mit x_2 und in Welt 3 mit x_3 überstimmt. Da x_1 und x_3 in Welt 3 verschiedenen sind, kann es eine solche Menge nicht geben.

e) Die Antiketteneigenschaft bedeutet, dass die Schnitte von a_i und a_j für $i \neq j$ leer sind. Folglich wird niemals verlangt, dass x in einer gewissen Welt gleichzeitig mit x_i und x_j übereinstimmt. Mit anderen Worten: Für jede Welt haben wir aufgrund der Antiketteneigenschaft höchstens ein x_i, das in dieser Welt mit x übereinstimmen muss, und diese Forderung ist immer zu erfüllen.

f) Die in b) konstruierte Menge x erfüllt (5.206).

g) Die Antiketteneigenschaft bedeutet, dass $a_i \wedge a_j$ für $i \neq j$ gleich 0 ist. Ist $a_i \wedge a_j \neq 0$, so stellt dies für uns kein Problem dar, wenn x_i und x_j in den in $a_i \wedge a_j$ liegenden Welten (also in jenen Welten, in denen x sowohl gleich x_i als auch gleich x_j sein muss) gleich sind. Gilt also

$$[\![x_i = x_j]\!] \geq a_i \wedge a_j,$$

so können wir ebenfalls immer ein passendes x finden. Die Menge $\{a_1, a_2, a_3\}$ aus der vorherigen Teilaufgabe erfüllt diese Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
[\![x_1 = x_2]\!] &= \{2\} \geq a_1 \wedge a_2 \\
[\![x_1 = x_3]\!] &= \{\} \geq a_1 \wedge a_3 \\
[\![x_2 = x_3]\!] &= \{3\} \geq a_2 \wedge a_3
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.23

Wir können den Beweis von Lemma 5.29 fast wörtlich übernehmen. Lediglich der Beweis der Teilaussage

$$a_i \wedge x(u) \leq [\![u \in x_i]\!]$$

muss modifiziert werden, da wir darin die Antiketten-Eigenschaft verwendet haben. Dass die Aussage trotzdem gilt, zeigt die folgende Herleitung:

$$\begin{aligned}
a_i \wedge x(u) &= \bigvee_{j \in I} \Big(a_i \wedge a_j \wedge [\![u \in x_j]\!] \Big) \\
&\leq \bigvee_{j \in I} \Big([\![x_i = x_j]\!] \wedge [\![u \in x_j]\!] \Big) \\
&\leq \bigvee_{j \in I} [\![u \in x_i]\!] = [\![u \in x_i]\!]
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.24

Ja. Die Herleitung gelingt, indem wir aus (5.134) mit (5.184) die Beziehung

$$[\![\forall\, \mathsf{u}\ (\mathsf{u} \in x \leftrightarrow \mathsf{u} \in y) \leftrightarrow x = y]\!] = 1$$

ableiten und dann eins zu eins wie im Beweis weiterargumentieren.

Lösung zu Aufgabe 5.25

In Übungsaufgabe 3.12 haben Sie die Beziehung

$$\forall\,\mathsf{v}\,(\exists\,(\mathsf{u}\in\mathsf{x})\;\mathsf{v}\in\mathsf{u}\to\mathsf{v}\in\mathsf{y})\;\equiv\;\forall\,(\mathsf{u}\in\mathsf{x})\,\forall\,(\mathsf{v}\in\mathsf{u})\;\mathsf{v}\in\mathsf{y}$$

gezeigt, die dasselbe ist wie

$$\models\forall\,\mathsf{v}\,(\exists\,(\mathsf{u}\in\mathsf{x})\;\mathsf{v}\in\mathsf{u}\to\mathsf{v}\in\mathsf{y})\leftrightarrow\forall\,(\mathsf{u}\in\mathsf{x})\,\forall\,(\mathsf{v}\in\mathsf{u})\;\mathsf{v}\in\mathsf{y}.$$

Aus dem Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik folgt

$$\vdash_{\mathrm{PL1}}\forall\,\mathsf{v}\,(\exists\,(\mathsf{u}\in\mathsf{x})\;\mathsf{v}\in\mathsf{u}\to\mathsf{v}\in\mathsf{y})\leftrightarrow\forall\,(\mathsf{u}\in\mathsf{x})\,\forall\,(\mathsf{v}\in\mathsf{u})\;\mathsf{v}\in\mathsf{y}$$

und mit (5.67) die Behauptung.

Die Beziehung lässt sich auch direkt beweisen, ohne den Rückgriff auf den Vollständigkeitssatz. Es seien $x, y \in \mathcal{M}^{(B)}$:

$$\begin{aligned}
&[\![\forall\,\mathsf{v}\,(\exists\,(\mathsf{u}\in x)\;\mathsf{v}\in\mathsf{u}\to\mathsf{v}\in y)]\!]\\
&\overset{(3.29)}{=}[\![\forall\,\mathsf{v}\,(\exists\,\mathsf{u}\,(\mathsf{u}\in x\wedge\mathsf{v}\in\mathsf{u})\to\mathsf{v}\in y)]\!]\\
&\overset{\substack{(5.28)\\(5.29)}}{=}\bigwedge_{v\in\mathcal{M}^{(B)}}\Big(\bigvee_{u\in\mathcal{M}^{(B)}}[\![u\in x\wedge v\in u]\!]\to[\![v\in y]\!]\Big)\\
&\overset{(4.39)}{=}\bigwedge_{v\in\mathcal{M}^{(B)}}\Big(\neg\bigvee_{u\in\mathcal{M}^{(B)}}[\![u\in x\wedge v\in u]\!]\vee[\![v\in y]\!]\Big)\\
&\overset{\substack{(4.78)\\(4.77)}}{=}\bigwedge_{v\in\mathcal{M}^{(B)}}\Big(\bigwedge_{u\in\mathcal{M}^{(B)}}[\![u\notin x\vee v\notin u]\!]\vee[\![v\in y]\!]\Big)\\
&\overset{(4.80)}{=}\bigwedge_{v\in\mathcal{M}^{(B)}}\bigwedge_{u\in\mathcal{M}^{(B)}}[\![u\notin x\vee v\notin u\vee v\in y]\!]\\
&\overset{(4.264)}{=}\bigwedge_{u\in\mathcal{M}^{(B)}}\bigwedge_{v\in\mathcal{M}^{(B)}}[\![u\notin x\vee v\notin u\vee v\in y]\!]\\
&\overset{(4.80)}{=}\bigwedge_{u\in\mathcal{M}^{(B)}}[\![u\notin x]\!]\vee\bigwedge_{v\in\mathcal{M}^{(B)}}[\![v\notin u\vee v\in y]\!]\\
&\overset{(5.28)}{=}[\![\forall\,\mathsf{u}\,(\mathsf{u}\notin x\vee\forall\,\mathsf{v}\,(\mathsf{v}\notin\mathsf{u}\vee\mathsf{v}\in y))]\!]\\
&\overset{(4.39)}{=}[\![\forall\,\mathsf{u}\,(\mathsf{u}\in x\to\forall\,\mathsf{v}\,(\mathsf{v}\in\mathsf{u}\to\mathsf{v}\in y))]\!]\\
&\overset{(3.28)}{=}[\![\forall\,(\mathsf{u}\in x)\,\forall\,(\mathsf{v}\in\mathsf{u})\;\mathsf{v}\in y]\!]
\end{aligned}$$

Die bewiesene Beziehung gilt für alle $x, y \in \mathcal{M}^{(B)}$. Somit gilt

$$[\![\forall\,\mathsf{v}\,(\exists\,(\mathsf{u}\in\mathsf{x})\;\mathsf{v}\in\mathsf{u}\to\mathsf{v}\in\mathsf{y})]\!]=[\![\forall\,(\mathsf{u}\in\mathsf{x})\,\forall\,(\mathsf{v}\in\mathsf{u})\;\mathsf{v}\in\mathsf{y}]\!],$$

was zu beweisen war.

Lösung zu Aufgabe 5.26

a) Als Induktionshypothese gelte:

$$[\![\forall \mathsf{x}\,(\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(\mathsf{x})) \to \varphi(u)]\!] = 1 \quad \text{für alle } u \in \mathrm{dom}(x)$$

Oder, was dasselbe ist:

$$[\![\forall \mathsf{x}\,(\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(\mathsf{x}))]\!] \leq [\![\varphi(u)]\!] \quad \text{für alle } u \in \mathrm{dom}(x) \tag{5.32}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
[\![\forall \mathsf{x}\,(\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(\mathsf{x}))]\!] &\overset{(5.32)}{\underset{(4.70)}{\leq}} \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} [\![\varphi(u)]\!] \\
&\overset{(4.60)}{\leq} \bigwedge_{u \in \mathrm{dom}(x)} \Big(x(u) \to [\![\varphi(u)]\!]\Big) \\
&\overset{(5.72)}{=} [\![\forall\,(\mathsf{u} \in x)\;\varphi(\mathsf{u})]\!]
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Es gilt aber auch:

$$\begin{aligned}
[\![\forall \mathsf{x}\,(\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(\mathsf{x}))]\!] &\overset{(5.28)}{=} \bigwedge_{x \in \mathcal{M}^{(B)}} [\![\forall\,(\mathsf{u} \in x)\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(x)]\!] \\
&\overset{(4.68)}{\leq} [\![\forall\,(\mathsf{u} \in x)\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(x)]\!]
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Zusammen ergeben (5.33) und (5.34) die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&[\![\forall \mathsf{x}\,(\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(\mathsf{x}))]\!] \\
&\overset{(4.63)}{\leq} [\![\forall\,(\mathsf{u} \in x)\;\varphi(\mathsf{u})]\!] \wedge [\![\forall\,(\mathsf{u} \in x)\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(x)]\!] \\
&\quad = [\![\forall\,(\mathsf{u} \in x)\;\varphi(\mathsf{u})]\!] \wedge \big([\![\forall\,(\mathsf{u} \in x)\;\varphi(\mathsf{u})]\!] \to [\![\varphi(x)]\!]\big) \\
&\overset{(4.181)}{=} [\![\forall\,(\mathsf{u} \in x)\;\varphi(\mathsf{u})]\!] \wedge [\![\varphi(x)]\!] \\
&\overset{(4.59)}{\leq} [\![\varphi(x)]\!]
\end{aligned}$$

Dies ist dasselbe wie

$$[\![\forall \mathsf{x}\,(\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(\mathsf{x})) \to \varphi(x)]\!] = 1, \tag{5.35}$$

was zu beweisen war.

b)

$$\begin{aligned}
&[\![\forall \mathsf{x}\,(\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(\mathsf{x})) \to \forall \mathsf{x}\,\varphi(\mathsf{x})]\!] \\
&\quad = [\![\neg\forall \mathsf{x}\,(\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(\mathsf{x}))]\!] \vee [\![\forall \mathsf{x}\,\varphi(\mathsf{x})]\!] \\
&\overset{(5.28)}{=} [\![\neg\forall \mathsf{x}\,(\forall\,(\mathsf{u} \in \mathsf{x})\;\varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(\mathsf{x}))]\!] \vee \bigwedge_{x \in \mathcal{M}^{(B)}} [\![\varphi(x)]\!]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overset{(4.80)}{} &= \bigwedge_{x \in \mathcal{M}^{(B)}} [\![\neg \forall \mathsf{x}\, (\forall\, (\mathsf{u} \in \mathsf{x})\, \varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(\mathsf{x})) \vee \varphi(x)]\!] \\
&= \bigwedge_{x \in \mathcal{M}^{(B)}} [\![\forall \mathsf{x}\, (\forall\, (\mathsf{u} \in \mathsf{x})\, \varphi(\mathsf{u}) \to \varphi(\mathsf{x})) \to \varphi(x)]\!] \\
\overset{(5.35)}{} &= \bigwedge_{x \in \mathcal{M}^{(B)}} 1 = 1
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 5.27

a) Wir unterscheiden zwei Fälle:

$$
\begin{aligned}
x = y \Rightarrow\ [\![\check{x} = \check{y} \to x = y]\!] &= [\![\check{x} = \check{x}]\!] \to [\![x = x]\!] \\
&\overset{(5.30)}{=} 1 \to 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \neq y \Rightarrow\ [\![\check{x} = \check{y} \to x = y]\!] &= [\![\check{x} = \check{y}]\!] \to [\![x = y]\!] \\
&\overset{(5.107)}{=} 0 \to [\![x = y]\!] \\
&= 1
\end{aligned}
$$

b) Ist $x \neq y$, so haben wir:

$$
[\![x = y \to \check{x} = \check{y}]\!] \overset{(5.107)}{=} [\![x = y]\!] \to 0 = \neg [\![x = y]\!] \tag{5.36}
$$

Das bedeutet, dass jede Wahl von $x, y \in \mathcal{M}^{(B)}$ mit $x \neq y$ und $[\![x = y]\!] \neq 0$ die Behauptung widerlegt. Als Beispiele können wir die Mengen aus Abbildung 5.2 wählen. Für diese Mengen gilt $x \neq y$ und $[\![x = y]\!] = \{3\} \neq 0$.

Lösung zu Aufgabe 5.28

Wir zeigen:

$$
[\![\forall\, (\mathsf{a} \in \check{z})\, \exists\, (\langle \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle \in f)\, \mathsf{a} = \mathsf{b}]\!] = 1
$$

$$
\begin{aligned}
[\![\forall\, (\mathsf{a} \in \check{z})\, \exists\, (\langle \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle \in f)\, \mathsf{a} = \mathsf{b}]\!] &\overset{(5.86)}{=} \bigwedge_{a \in \mathrm{dom}(\check{z})} [\![\exists\, (\langle \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle \in f)\, a = \mathsf{b}]\!] \\
&\overset{\substack{(5.117)\\(5.172)\\(5.173)}}{=} \bigwedge_{a \in \mathrm{dom}(\check{z})} \bigvee_{(\check{v}, v)^B \in \mathrm{dom}(f)} [\![a = \check{v}]\!] \\
&\overset{(5.92)}{=} \bigwedge_{a \in z} \bigvee_{(\check{v}, v)^B \in \mathrm{dom}(f)} [\![\check{a} = \check{v}]\!]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\overset{(5.171)}{(5.172)} &= \bigwedge_{a\in\mathrm{dom}(x)} \bigvee_{v\in\mathrm{dom}(x)} [\![\check{a}=\check{v}]\!] \\
&\geq \bigwedge_{a\in\mathrm{dom}(x)} [\![\check{a}=\check{a}]\!] \\
\overset{(5.30)}{} &= \bigwedge_{a\in\mathrm{dom}(x)} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5.29

x, y seien zwei beliebige boolesche Mengen aus $\mathcal{M}^{(B)}$. Wir definieren die Menge z folgendermaßen:

$$\mathrm{dom}(z) := \{x, y\} \tag{5.37}$$
$$z(x) := 1 \tag{5.38}$$
$$z(y) := 1 \tag{5.39}$$

Dann gilt für alle $w \in \mathcal{M}^{(B)}$:

$$\begin{aligned}
[\![w\in z]\!] \overset{(5.20)}{} &= \bigvee_{v\in\mathrm{dom}(z)} \Big(z(v)\wedge [\![v=w]\!]\Big) \\
\overset{(5.37)}{} &= \big(z(x)\wedge [\![x=w]\!]\big) \vee \big(z(y)\wedge [\![y=w]\!]\big) \\
\overset{(5.38)}{(5.39)} &= [\![x=w\vee y=w]\!]
\end{aligned}$$

Dies ist nach (5.184) das Gleiche wie:

$$[\![w\in z \leftrightarrow (x=w\vee y=w)]\!] = 1 \tag{5.40}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Gültigkeit des Paarmengenaxioms:

$$\begin{aligned}
&[\![\forall\,\mathsf{x}\,\forall\,\mathsf{y}\,\exists\,\mathsf{z}\,\forall\,\mathsf{w}\;(\mathsf{w}\in\mathsf{z}\leftrightarrow(\mathsf{w}=\mathsf{x}\vee\mathsf{w}=\mathsf{y}))]\!] \\
\overset{(5.28)}{} &= \bigwedge_{x,y\in\mathcal{M}^{(B)}} \bigvee_{z\in\mathcal{M}^{(B)}} \bigwedge_{w\in\mathcal{M}^{(B)}} [\![w\in z\leftrightarrow(x=w\vee y=w)]\!] \\
\overset{(4.69)}{} &\geq \bigwedge_{x,y\in\mathcal{M}^{(B)}} \bigwedge_{w\in\mathcal{M}^{(B)}} [\![w\in z\leftrightarrow(x=w\vee y=w)]\!] \\
\overset{(5.40)}{} &= \bigwedge_{x,y\in\mathcal{M}^{(B)}} 1=1
\end{aligned}$$

6 Ordinal- und Kardinalzahlen in $\mathcal{M}^{(B)}$

Lösung zu Aufgabe 6.1

Wenn wir die Variable x mit der Menge x und die Variable y mit der Menge y belegen, besagen die ersten beiden Formelbestandteile von φ, dass y ist eine Ordinalzahl ist, die x enthält. Somit ist x ebenfalls eine Ordinalzahl und erfüllt die Beziehung $x < y$. Ferner besagt die Formel, dass alle Elemente von y endliche Ordinalzahlen sind. Das bedeutet, dass y entweder selbst eine endliche Ordinalzahl oder die kleinsten transfinite Kardinalzahl $\aleph_0$ ist. Es gilt also $y \leq \aleph_0$, zusammen also $x < y \leq \aleph_0$.

Umgekehrt ist φ für alle Ordinalzahlen x und y mit $x < y \leq \aleph_0$ eine wahre Aussage. Wir haben also:

$$\mathcal{M} \models \varphi(x, y) \;\Leftrightarrow\; x, y \in \mathrm{Ord}^{\mathcal{M}} \text{ mit } x < y \leq \aleph_0$$

Lösung zu Aufgabe 6.2

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}} &\underset{(6.42)}{\Rightarrow} [\![\mathfrak{Card}(\check{x})]\!] = 1 \\ &\underset{(4.109)}{\Rightarrow} [\![\mathfrak{Card}(\check{x})]\!] \in U \\ x \notin \mathrm{Card}^{\mathcal{M}} &\Rightarrow M \not\models \mathfrak{Card}(x) \\ &\underset{(6.25)}{\Rightarrow} [\![\mathfrak{Card}(\check{x})]\!] = 0 \\ &\underset{(4.109)}{\Rightarrow} [\![\mathfrak{Card}(\check{x})]\!] \notin U \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6.3

a) Wir wissen, dass $\neg\mathfrak{Card}(\mathsf{x})$ eine Σ_1-Formel ist. Somit gilt:

$$\alpha \notin \mathrm{Card}^{\mathcal{M}} \;\Rightarrow\; [\![\neg\mathfrak{Card}(\check{\alpha})]\!] = 1 \tag{6.1}$$

Wir verwenden dies, um das folgende Zwischenergebnis herzuleiten:

$$\begin{aligned}
\llbracket \mathfrak{Ord}(x) \rrbracket &\overset{(6.17)}{=} \bigvee_{\alpha \in \mathrm{Ord}^{\mathcal{M}}} \llbracket x = \check{\alpha} \rrbracket \\
&= \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathrm{Ord}^{\mathcal{M}} \\ \alpha \notin \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}}} \llbracket x = \check{\alpha} \rrbracket \vee \bigvee_{\alpha \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}} \llbracket x = \check{\alpha} \rrbracket \\
&\overset{(6.1)}{=} \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathrm{Ord}^{\mathcal{M}} \\ \alpha \notin \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}}} \llbracket x = \check{\alpha} \wedge \neg \mathfrak{Card}(\check{\alpha}) \rrbracket \vee \bigvee_{\alpha \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}} \llbracket x = \check{\alpha} \rrbracket \\
&\overset{(5.66)}{\leq} \bigvee_{\substack{\alpha \in \mathrm{Ord}^{\mathcal{M}} \\ \alpha \notin \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}}} \llbracket \neg \mathfrak{Card}(x) \rrbracket \vee \bigvee_{\alpha \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}} \llbracket x = \check{\alpha} \rrbracket \\
&= \llbracket \neg \mathfrak{Card}(x) \rrbracket \vee \bigvee_{\alpha \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}} \llbracket x = \check{\alpha} \rrbracket \\
&= \llbracket \mathfrak{Card}(x) \rrbracket \to \bigvee_{\alpha \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}} \llbracket x = \check{\alpha} \rrbracket \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

Daraus können wir schließen:

$$\begin{aligned}
1 &= \llbracket \mathfrak{Card}(x) \to \mathfrak{Ord}(x) \rrbracket \\
&\overset{(6.2)}{\leq} \llbracket \mathfrak{Card}(x) \rrbracket \to \Big(\llbracket \mathfrak{Card}(x) \rrbracket \to \bigvee_{\kappa \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}} \llbracket x = \check{\kappa} \rrbracket \Big) \\
&= \llbracket \mathfrak{Card}(x) \rrbracket \to \bigvee_{\kappa \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}} \llbracket x = \check{\kappa} \rrbracket
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung aus (4.54).

b) Aufgrund der abzählbaren Antikettenbedingung gilt:

$$\kappa \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}} \;\Rightarrow\; \llbracket \mathfrak{Card}(\check{\kappa}) \rrbracket = 1 \qquad (6.3)$$

Daraus können wir schließen:

$$\begin{aligned}
\bigvee_{\kappa \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}} \llbracket x = \check{\kappa} \rrbracket &\overset{(6.3)}{=} \bigvee_{\kappa \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}} \llbracket x = \check{\kappa} \wedge \mathfrak{Card}(\check{\kappa}) \rrbracket \\
&\overset{(5.66)}{\leq} \bigvee_{\kappa \in \mathrm{Card}^{\mathcal{M}}} \llbracket \mathfrak{Card}(x) \rrbracket \\
&= \llbracket \mathfrak{Card}(x) \rrbracket
\end{aligned}$$

Zusammen mit der vorherigen Teilaufgabe folgt die Gleichheit.

7 Modelltransformation

Lösung zu Aufgabe 7.1

$$\begin{aligned} x \in y \ &\overset{(5.98)}{\Rightarrow} [\![\check{x} \in \check{y}]\!] = 1 \ \overset{(4.109)}{\Rightarrow} \ [\![\check{x} \in \check{y}]\!] \in U \\ [\![\check{x} \in \check{y}]\!] \in U \ &\overset{(4.109)}{\Rightarrow} [\![\check{x} \in \check{y}]\!] \neq 0 \ \overset{(5.106)}{\Rightarrow} \ x \in y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = y \ &\overset{(5.99)}{\Rightarrow} [\![\check{x} = \check{y}]\!] = 1 \ \overset{(4.109)}{\Rightarrow} \ [\![\check{x} = \check{y}]\!] \in U \\ [\![\check{x} = \check{y}]\!] \in U \ &\overset{(4.109)}{\Rightarrow} [\![\check{x} = \check{y}]\!] \neq 0 \ \overset{(5.107)}{\Rightarrow} \ x = y \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7.2

Die Modelleigenschaft von $\mathcal{M}^{(B)}/_U$ bedeutet, dass jede Formel, die sich in ZFC herleiten lässt, eine wahre Aussage über die Mengen aus $\mathcal{M}^{(B)}/_U$ ist. Die Beziehung (2.149) lässt sich in ZFC formalisieren, z. B. durch die folgende Formel:

$$\varphi \ := \ \mathsf{x} \in \mathsf{y} \wedge \mathfrak{Rang}(\mathsf{r}, \mathsf{x}) \wedge \mathfrak{Rang}(\mathsf{s}, \mathsf{y}) \rightarrow \mathsf{r} \in \mathsf{s}$$

Hierin in $\mathfrak{Rang}$ die Formalisierung der Rang-Definition (2.91).

Diese Formel ist in ZFC beweisbar und damit gilt:

$$\mathcal{M}^{(B)}/_U \models \mathsf{x} \in \mathsf{y} \wedge \mathfrak{Rang}(\mathsf{r}, \mathsf{x}) \wedge \mathfrak{Rang}(\mathsf{s}, \mathsf{y}) \rightarrow \mathsf{r} \in \mathsf{s}$$

Damit gilt insbesondere

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}^{(B)}/_U \models \\ &\quad [x_i]_U \in [x_j]_U \wedge \mathfrak{Rang}([r_i]_U, [x_i]_U) \wedge \mathfrak{Rang}([r_j]_U, [x_j]_U) \rightarrow [r_i]_U \in [r_j]_U \end{aligned} \tag{7.1}$$

Aus dem im Beweis von Lemma 7.7 genannten Voraussetzungen gilt

$$\mathcal{M}^{(B)}/_U \models \mathfrak{Rang}([r_i]_U, [x_i]_U) \text{ und} \tag{7.2}$$

$$\mathcal{M}^{(B)}/_U \models \mathfrak{Rang}([r_j]_U, [x_j]_U), \tag{7.3}$$

sodass wir (7.1) folgendermaßen vereinfachen können:

$$\mathcal{M}^{(B)}/_U \models [x_i]_U \in [x_j]_U \rightarrow [r_i]_U \in [r_j]_U \tag{7.4}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
[\,x_i\,]_U \in_U [\,x_j\,]_U &\underset{(3.9)}{\Rightarrow} \mathcal{M}^{(B)}/_U \models [\,x_i\,]_U \in [\,x_j\,]_U \\
&\underset{(7.4)}{\Rightarrow} \mathcal{M}^{(B)}/_U \models [\,r_i\,]_U \in [\,r_j\,]_U \\
&\underset{(3.9)}{\Rightarrow} [\,r_i\,]_U \in_U [\,r_j\,]_U
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7.3

$$\begin{aligned}
x^U &\underset{(7.14)}{=} \pi([\,x\,]_U) \\
&\underset{(7.10)}{=} \{\pi([\,u\,]_U) \mid [\![u \in x]\!] \in U\} \\
&\underset{(7.14)}{=} \{u^U \mid [\![u \in x]\!] \in U\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^U \in x^U &\underset{(7.14)}{\Leftrightarrow} \pi([\,u\,]_U) \in \pi([\,x\,]_U) \\
&\underset{(7.12)}{\Leftrightarrow} [\,u\,]_U \in_U [\,x\,]_U \\
&\underset{(7.3)}{\Leftrightarrow} [\![u \in x]\!] \in U
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^U = y^U &\underset{(7.14)}{\Leftrightarrow} \pi([\,x\,]_U) = \pi([\,y\,]_U) \\
&\underset{(7.11)}{\Leftrightarrow} [\,x\,]_U = [\,y\,]_U \\
&\Leftrightarrow x \sim_U y \\
&\underset{(7.1)}{\Leftrightarrow} [\![x = y]\!] \in U
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\check{u}^U \in \check{x}^U &\underset{(7.28)}{\Leftrightarrow} [\,\check{u}\,]_U \in_U [\,\check{x}\,]_U \\
&\underset{(7.5)}{\Leftrightarrow} u \in x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\check{x}^U = \check{y}^U &\underset{(7.30)}{\Leftrightarrow} [\,\check{x}\,]_U = [\,\check{y}\,]_U \\
&\underset{(7.6)}{\Leftrightarrow} x = y
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7.4

Vorbemerkung: Die Transitivität der Menge $f(\mathcal{M})$ bedeutet:

$$\text{Für alle } x \in \mathcal{M} \text{ gilt: Aus } u \in f(x) \in f(\mathcal{M}) \text{ folgt } u \in f(\mathcal{M})$$

Oder, was dasselbe ist:

$$\text{Für alle } x \in \mathcal{M} \text{ und } u \in \check{x}^U \text{ gibt es ein } v \in \mathcal{M} \text{ mit } u = \check{v}^U \tag{7.5}$$

a) Es sei $x \in \mathcal{M}$ und

$$u \in \check{x}^U. \tag{7.6}$$

Wir wissen, dass die Menge $\mathcal{M}[U]$ transitiv ist, sodass nicht nur $\check{x}^U$, sondern auch u ein Element von $\mathcal{M}[U]$ ist. Das bedeutet, dass ein $w \in \mathcal{M}^{(B)}$ mit

$$w^U = u \tag{7.7}$$

existiert. Die Menge $\mathcal{M}$ ist ebenfalls transitiv und das bedeutet:

$$v \in x \in \mathcal{M} \Rightarrow v \in \mathcal{M} \tag{7.8}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\overset{(7.6)}{(7.7)} \Rightarrow w^U \in \check{x}^U \\
&\overset{(7.29)}{\Rightarrow} [\![w \in \check{x}]\!] \in U \\
&\overset{(4.110)}{\Rightarrow} \bigvee_{v \in x} [\![w = \check{v}]\!] \in U \\
&\overset{(4.134)}{\Rightarrow} \{[\![w = \check{v}]\!] \mid v \in x\} \cap U \neq \emptyset \\
&\Rightarrow [\![w = \check{v}]\!] \in U \text{ für ein } v \in x \in \mathcal{M} \\
&\overset{(7.8)}{\Rightarrow} [\![w = \check{v}]\!] \in U \text{ für ein } v \in \mathcal{M} \\
&\overset{(7.31)}{\Rightarrow} w^U = \check{v}^U \text{ für ein } v \in \mathcal{M} \\
&\overset{(7.7)}{\Rightarrow} u = \check{v}^U \text{ für ein } v \in \mathcal{M}, \text{ was zu beweisen war.}
\end{aligned}$$

b) Wir zeigen die Beziehung $\check{x}^U = x$ durch $\in$-Induktion über x.

Die Induktionshypothese lautet:

$$\check{u}^U = u \text{ für alle } u \in x \tag{7.9}$$

1. Wir zeigen: Aus $u \in x$ folgt $u \in \check{x}^U$

$$u \in x \overset{\substack{(7.9)\\(7.32)}}{\Rightarrow} \check{u}^U = u \text{ und } \check{u}^U \in \check{x}^U \overset{(7.9)}{\Rightarrow} u \in \check{x}^U$$

2. Wir zeigen: Aus $u \in \check{x}^U$ folgt $u \in x$

$$\begin{aligned}
u \in \check{x}^U &\overset{(7.5)}{\Rightarrow} u \in \check{x}^U \text{ und } u = \check{v}^U \text{ für ein } v \in \mathcal{M} \\
&\Rightarrow \check{v}^U \in \check{x}^U \\
&\overset{(7.32)}{\Rightarrow} v \in x \\
&\overset{(7.9)}{\Rightarrow} \check{v}^U \in x \\
&\Rightarrow u \in x
\end{aligned}$$

Beide Fälle zusammen ergeben $x = \check{x}^U$, was zu zeigen war.

Lösung zu Aufgabe 7.5

Wählen wir die boolesche Algebra $(\{0,1\},\wedge,\vee)$ und $U=\{1\}$, dann ist $\mathcal{M}^{(B)}=\mathcal{M}^{(2)}$. Um zu zeigen, dass diese Menge unseren Zweck erfüllt, beweisen wir zunächst zwei Hilfsaussagen:

1. Für alle $x\in\mathcal{M}^{(2)}$ existiert ein $\check{y}\in\check{M}$ mit $[\,x\,]_U=[\,\check{y}\,]_U$ (7.10)

$$\begin{aligned} x\in\mathcal{M}^{(2)} &\overset{(5.193)}{\Rightarrow} [\![x=\check{y}]\!]=1 \text{ für ein } \check{y}\in\check{M}\\ &\overset{\substack{(7.1)\\(4.109)}}{\Rightarrow} x\sim_U\check{y}\\ &\Rightarrow [\,x\,]_U=[\,\check{y}\,]_U \end{aligned}$$

2. $\{x^U\mid x\in\mathcal{M}^{(2)}\}=\{\check{x}^U\mid\check{x}\in\check{\mathcal{M}}\}$ (7.11)

   Wegen $\check{\mathcal{M}}\supset\mathcal{M}^{(2)}$ gilt

$$\{x^U\mid x\in\mathcal{M}^{(2)}\}\supseteq\{\check{x}^U\mid\check{x}\in\check{\mathcal{M}}\}$$

   Die andere Inklusionsrichtung ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} u\in\{x^U\mid x\in\mathcal{M}^{(2)}\} &\overset{(7.14)}{\Rightarrow} u\in\{\pi([\,x\,]_U)\mid x\in\mathcal{M}^{(2)}\}\\ &\Rightarrow u=\pi([\,x\,]_U)\text{ für ein } x\in\mathcal{M}^{(2)}\\ &\overset{(7.10)}{\Rightarrow} u=\pi([\,\check{y}\,]_U)\text{ für ein } \check{y}\in\check{\mathcal{M}}\\ &\Rightarrow u\in\{\pi([\,\check{y}\,]_U)\mid\check{y}\in\check{\mathcal{M}}\}\\ &\overset{(7.14)}{\Rightarrow} u\in\{x^U\mid\check{x}\in\check{\mathcal{M}}\} \end{aligned}$$

3. Wir zeigen: $\mathcal{M}[U]=\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[U] &\overset{\substack{(7.9)\\(7.14)}}{=}\{x^U\mid x\in\mathcal{M}^{(2)}\}\\ &\overset{(7.11)}{=}\{\check{x}^U\mid\check{x}\in\check{\mathcal{M}}\}\\ &\overset{(5.190)}{=}\{\check{x}^U\mid x\in\mathcal{M}\}\\ &\overset{(7.16)}{=}\{x\mid x\in\mathcal{M}\}\\ &=\mathcal{M} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7.6

a)

$$\mathcal{M}\models\varphi(x_1,\ldots,x_n)\overset{(5.110)}{\Rightarrow}[\![\varphi(\check{x}_1,\ldots,\check{x}_n)]\!]=1$$

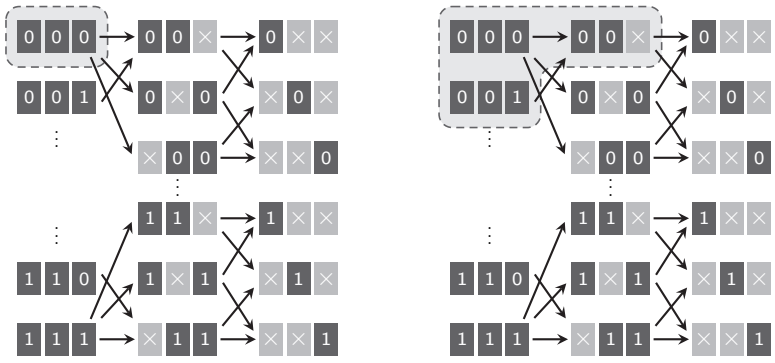
$$
\begin{aligned}
& \overset{(4.109)}{\Rightarrow} [\![\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)]\!] \in U \\
& \overset{(7.15)}{\Rightarrow} \mathcal{M}[U] \models \varphi(\check{x}_1^U, \ldots, \check{x}_n^U) \\
& \overset{(7.16)}{\Rightarrow} \mathcal{M}[U] \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \qquad (7.12) \\
\mathcal{M} \not\models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \quad & \overset{(3.11)}{\Rightarrow} \mathcal{M} \models \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n) \\
& \overset{(7.12)}{\Rightarrow} \mathcal{M}[U] \models \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n) \\
& \overset{(3.11)}{\Rightarrow} \mathcal{M}[U] \not\models \varphi(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

b) Für Σ_1-Formeln gilt die Richtung von links nach rechts weiterhin. Wir können den obigen Beweis im Klartext wiederholen und müssen lediglich die Anwendung von Korollar 5.24 im ersten Schritt durch die Anwendung von Korollar 5.25 ersetzen. Die Schlussrichtung von rechts nach links gilt nicht mehr. Der obige Beweis basiert auf der Tatsache, dass die Negation einer Δ_0-Formel wieder eine Δ_0-Formel ist. Für Σ_1-Formel können wir aber nicht auf diese Weise argumentieren, da die Negation einer Σ_1-Formel im Allgemeinen keine Σ_1-Formel mehr ist.

8 Unabhängigkeitsbeweise

Lösung zu Aufgabe 8.1

a)



b) Nein. Da Ideale nach unten abgeschlossen sind, muss in I eine Funktion enthalten sein, die an jeder Stelle definiert ist. Dann ist $\bigcup I$ eine linkstotale Relation. Wäre $\bigcup I$ eine Funktion, so wäre $\bigcup I$ immer auch total.

Lösung zu Aufgabe 8.2

a) Ist Q ein Filter, so kann $\bigcup Q$ keine Funktion sein. Um dies einzusehen, wählen wir ein Element $h \in Q$. Da P nur Funktionen mit einem endlichen Definitionsbereich enthält, ist auch der Definitionsbereich von h endlich. Somit gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ für die h nicht definiert ist. Dann gelten für die Funktionen $f := h \cup \{(n, 0)\}$ und $g := h \cup \{(n, 1)\}$ die Beziehungen:

$$f \leq h \text{ und } g \leq h$$

Das bedeutet, dass f und g beide in Q enthalten sind, und damit ist sowohl $(n, 0)$ als auch $(n, 1)$ ein Element von $\bigcup Q$. Folgerichtig ist $\bigcup Q$ keine Funktion.

b) Für keinen Filter ist $\bigcup Q$ eine Funktion, also auch nicht für generische Filter.

c) In diesem Fall ist $\bigcup Q$ eine (partielle) Funktion. Wir können genauso argumentieren wie im Beispiel auf Seite 393. Da wir in dieser Aufgabe die Relation ‚$\leq$' umgekehrt definiert haben, als die Teilmengenbeziehung ‚$\subseteq$', ist alles, was wir auf Seite 393 für Filter erarbeitet haben, in diesem Beispiel für Ideale richtig und umgekehrt.

Lösung zu Aufgabe 8.3

Nein. Um das Lemma von Rasiowa-Sikorski anzuwenden, benötigen wir als Voraussetzung, dass P höchstens abzählbar viele dichte Teilmengen hat. Wir wissen zwar, dass $\mathcal{M}$ ein abzählbares Modell und P in $\mathcal{M}$ enthalten ist, aber nicht, dass auch jede dichte Teilmenge von P ein Element von $\mathcal{M}$ ist. Aus der Abzählbarkeit von $\mathcal{M}$ und der Eigenschaft $P \in \mathcal{M}$ können wir also nicht schließen, dass auch die Menge aller dichten Teilmengen von P abzählbar ist.

Anders verhält es sich, wenn wir $\mathcal{M}$-generische Filter betrachten. Hier fordern wir explizit, dass nur solche dichten Teilmengen berücksichtigt werden, die in $\mathcal{M}$ enthalten sind. Da $\mathcal{M}$ abzählbar ist, kann es nur abzählbar viele solche Teilmengen geben und das Lemma von Rasiowa-Sikorski führt uns zum Ziel.

Lösung zu Aufgabe 8.4

a)

$$\begin{aligned} p \Vdash \varphi \text{ und } q \leq p &\overset{(8.9)}{\Rightarrow} \rho(p) \leq [\![\varphi]\!] \text{ und } q \leq p \\ &\overset{(4.170)}{\Rightarrow} \rho(p) \leq [\![\varphi]\!] \text{ und } \rho(q) \leq \rho(p) \\ &\Rightarrow \rho(q) \leq [\![\varphi]\!] \\ &\overset{(8.9)}{\Rightarrow} q \Vdash \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \Vdash \varphi \text{ und } p \Vdash \neg\varphi &\overset{(8.9)}{\Rightarrow} \rho(p) \leq [\![\varphi]\!] \text{ und } \rho(p) \leq [\![\neg\varphi]\!] \\ &\overset{(4.63)}{\Rightarrow} \rho(p) \leq [\![\varphi]\!] \wedge [\![\neg\varphi]\!] = 0 \\ &\Rightarrow \rho(p) = 0, \text{ im Widerspruch zu } \rho(p) \in B\backslash\{0\} \end{aligned}$$

b) Vorbereitend zeigen wir:

$$\rho(p) \wedge [\![\varphi]\!] = 0 \;\Leftrightarrow\; p \Vdash \neg\varphi \tag{8.1}$$

$$\rho(p) \wedge [\![\varphi]\!] \neq 0 \text{ oder } \rho(p) \wedge [\![\neg\varphi]\!] \neq 0 \tag{8.2}$$

1. Beweis von (8.1)

$$\begin{aligned}
\rho(p) \wedge [\![\varphi]\!] = 0 \Rightarrow \rho(p) \wedge [\![\neg\varphi]\!] &\overset{(4.15)}{=} (\rho(p) \wedge [\![\neg\varphi]\!]) \vee (\rho(p) \wedge [\![\varphi]\!]) \\
&\overset{(4.18)}{=} \rho(p) \wedge ([\![\neg\varphi]\!] \vee [\![\varphi]\!]) \\
&\overset{(4.28)}{=} \rho(p) \wedge 1 \\
&\overset{(4.14)}{=} \rho(p) \\
&\Rightarrow \rho(p) \leq [\![\neg\varphi]\!] \\
&\overset{(8.9)}{\Rightarrow} p \Vdash \neg\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p \Vdash \neg\varphi &\overset{(8.9)}{\Rightarrow} \rho(p) \leq [\![\neg\varphi]\!] \\
&\overset{(4.42)}{\Rightarrow} \rho(p) = \rho(p) \wedge [\![\neg\varphi]\!] \\
&\Rightarrow \rho(p) \wedge [\![\varphi]\!] = (\rho(p) \wedge [\![\neg\varphi]\!]) \wedge [\![\varphi]\!] \\
&\overset{(4.1)}{=} \rho(p) \wedge (\neg[\![\varphi]\!] \wedge [\![\varphi]\!]) \\
&\overset{(4.27)}{=} \rho(p) \wedge 0 \\
&\overset{(4.22)}{=} 0
\end{aligned}$$

2. Beweis von (8.2)

$$\begin{aligned}
&\overset{(8.22)}{\Rightarrow} p \nVdash \varphi \text{ oder } p \nVdash \neg\varphi \\
&\overset{(8.1)}{\Rightarrow} \rho(p) \wedge [\![\varphi]\!] \neq 0 \text{ oder } \rho(p) \wedge [\![\neg\varphi]\!] \neq 0
\end{aligned}$$

Für den Beweis der Behauptung führen wir gemäß (8.2) eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $\rho(p) \wedge [\![\varphi]\!] \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\overset{(4.171)}{\Rightarrow} \text{Es gibt ein } q \in P \text{ mit } \rho(q) \leq \rho(p) \wedge [\![\varphi]\!] \\
&\overset{(4.63)}{\Rightarrow} \rho(q) \leq \rho(p) \text{ und } \rho(q) \leq [\![\varphi]\!] \\
&\overset{\substack{(4.170)\\(8.9)}}{\Rightarrow} q \leq p \text{ und } q \Vdash \varphi
\end{aligned}$$

2. Fall: $\rho(p) \wedge [\![\neg\varphi]\!] \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\overset{(4.171)}{\Rightarrow} \text{Es gibt ein } q \in P \text{ mit } \rho(q) \leq \rho(p) \wedge [\![\neg\varphi]\!] \\
&\overset{(4.63)}{\Rightarrow} \rho(q) \leq \rho(p) \text{ und } \rho(q) \leq [\![\neg\varphi]\!] \\
&\overset{\substack{(4.170)\\(8.9)}}{\Rightarrow} q \leq p \text{ und } q \Vdash \neg\varphi
\end{aligned}$$

c) 1. Beweis von (8.24)

(a) Es gelte $p \Vdash \neg\varphi$. Wir zeigen: Für alle $q \leq p$ gilt $q \nVdash \varphi$
Gäbe es ein $q \leq p$ mit $q \Vdash \varphi$, so hätten wir $p \Vdash \varphi$ aufgrund von (8.21), was wegen (8.22) nicht sein kann.

(b) Für alle $q \leq p$ gelte $q \nVdash \varphi$. Wir zeigen: $p \Vdash \neg\varphi$
Hätten wir $p \nVdash \neg\varphi$, so wäre $\rho(p) \wedge [\![\varphi]\!] \neq 0$ wegen (8.1). Genau wie im Beweis von (8.23) können wir daraus schließen, dass ein $q \leq p$ mit $q \Vdash \varphi$ existiert, im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Beweis von (8.25)

$$\begin{aligned} p \Vdash \varphi \wedge \psi &\overset{(8.9)}{\Leftrightarrow} \rho(p) \leq [\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!] \\ &\overset{(4.63)}{\Leftrightarrow} \rho(p) \leq [\![\varphi]\!] \text{ und } \rho(p) \leq [\![\psi]\!] \\ &\overset{(8.9)}{\Leftrightarrow} p \Vdash \varphi \text{ und } p \Vdash \psi \end{aligned}$$

3. Beweis von (8.26)

$$\begin{aligned} p \Vdash \forall \mathsf{x}\, \varphi(\mathsf{x}) &\overset{(8.9)}{\Leftrightarrow} \rho(p) \leq [\![\forall \mathsf{x}\, \varphi(\mathsf{x})]\!] \\ &\overset{(5.28)}{\Leftrightarrow} \rho(p) \leq \bigwedge_{\dot{x} \in \mathcal{M}^{(B)}} [\![\varphi(\dot{x})]\!] \\ &\overset{(4.70)}{\Leftrightarrow} \rho(p) \leq [\![\varphi(\dot{x})]\!] \text{ für alle } \dot{x} \in \mathcal{M}^{(B)} \\ &\overset{(8.9)}{\Leftrightarrow} p \Vdash \varphi(\dot{x}) \text{ für alle } \dot{x} \in \mathcal{M}^{(B)} \end{aligned}$$

d) Die Beziehungen sind falsch. Die folgenden Herleitungen zeigen, wie sie richtig lauten müssen:

$$\begin{aligned} p \Vdash \varphi \vee \psi &\Leftrightarrow p \Vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ &\overset{(8.24)}{\Leftrightarrow} \text{Für alle } q \leq p \text{ gilt } q \nVdash \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ &\overset{(8.25)}{\Leftrightarrow} \text{Für alle } q \leq p \text{ gilt } q \nVdash \neg\varphi \text{ oder } q \nVdash \neg\psi \\ &\overset{(8.24)}{\Leftrightarrow} \text{Für alle } q \leq p \text{ existiert ein } r \leq q \text{ mit } r \Vdash \varphi \text{ oder } r \Vdash \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \Vdash \exists \mathsf{x}\, \varphi(\mathsf{x}) &\Leftrightarrow p \Vdash \neg\forall \mathsf{x}\, \neg\varphi(\mathsf{x}) \\ &\overset{(8.24)}{\Leftrightarrow} \text{Für alle } q \leq p \text{ gilt } q \nVdash \forall \mathsf{x}\, \neg\varphi(\mathsf{x}) \\ &\overset{(8.26)}{\Leftrightarrow} \text{Für alle } q \leq p \text{ existiert ein } \dot{x} \in \mathcal{M}^{(B)} \text{ mit } q \nVdash \neg\varphi(\dot{x}) \\ &\overset{(8.24)}{\Leftrightarrow} \text{Für alle } q \leq p \text{ existiert ein } \dot{x} \in \mathcal{M}^{(B)} \text{ und ein } r \leq q \text{ mit } r \Vdash \varphi(\dot{x}) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 8.5

Ja, die Definitionen sind gleichwertig. Wenn jede abzählbare ‚<'-Kette eine untere Schranke hat, dann hat auch jede Folge der Form

$$p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \ldots \tag{8.3}$$

eine untere Schranke, nämlich die untere Schranke der Folge

$$q_0 > q_1 > q_2 > q_3 > \dots$$

die aus (8.3) durch das Streichen gleicher Elemente entsteht.

Umgekehrt können wir für jede abzählbare ‚<'-Kette eine untere Schranke erhalten, indem wir ein beliebiges Element p_0 entnehmen und aus den Kettenelemente kleiner q_0 eine Folge der Form (8.3) konstruieren. Die untere Schranke dieser Folge ist dann auch eine untere Schranke der ursprünglichen Kette.

Lösung zu Aufgabe 8.6

a) Wir beweisen die Behauptung durch Widerspruch und nehmen an, es gelte $p \not\perp q$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} p \not\perp q \ \overset{(4.85)}{\Rightarrow}\ & r \leq p \text{ und } r \leq q \text{ für ein } r \in P \\ \Rightarrow\ & p \subseteq r \text{ und } q \subseteq r \\ \Rightarrow\ & (a,b) \in r \text{ und } (a,c) \in r \\ \Rightarrow\ & b = c, \text{ da } r \text{ eine (partielle) Funktion ist} \end{aligned}$$

b) Es seien $f, g \in P$ mit $f \not\leq g$. Wir müssen zeigen, dass ein $h \in P$ mit

$$h \leq f \text{ und } h \perp g$$

existiert. Wir haben:

$$f \not\leq g \Rightarrow\ g \not\sqsubseteq f \Rightarrow \text{ Es existiert ein } (a,b) \in g \text{ mit } (a,b) \notin f \tag{8.4}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $a \in \mathrm{dom}(f)$

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{dom}(f) \Rightarrow\ & (a,c) \in f \text{ für ein } c \in B \\ \overset{(8.4)}{\Rightarrow}\ & (a,c) \in f, (a,b) \in g, (a,b) \notin f \\ \Rightarrow\ & (a,c) \in f, (a,b) \in g, b \neq c \\ \overset{(8.27)}{\Rightarrow}\ & f \perp g \end{aligned}$$

   Wir setzen $h := f$ und sind fertig.

2. Fall: $a \notin \mathrm{dom}(f)$
   Wir setzen $h := f \cup \{(a,c)\}$ für ein $c \in B$ mit $b \neq c$ und folgern:

$$h = f \cup \{(a,c)\} \text{ mit } b \neq c \Rightarrow f \subset h \text{ und } (a,c) \in h \text{ mit } b \neq c$$

$$\overset{(8.4)}{\Rightarrow} f \subset h, (a,b) \in g \text{ und } (a,c) \in h \text{ mit } b \neq c$$
$$\overset{(8.27)}{\Rightarrow} h \leq f \text{ und } h \perp g$$

c) Die Eigenschaft, dass A und B unendlich viele Elemente enthalten, haben wir an keiner Stelle verwendet, und wir können den Beweis auch eins zu eins auf fast alle endlichen Mengen übertragen. Der einzige Fall, in dem die Argumentationskette bricht, ist der Fall, dass die Menge B nur ein einziges Element enthält. In diesem Fall können wir die Funktion f nicht mehr um ein Paar (a,c) mit $b \neq c$ ergänzen, was aber nötig ist, um eine inkompatible Funktion zu konstruieren.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Behauptung für eine einelementige Zielmenge B auch tatsächlich falsch ist. Sei $A = \mathbb{N}$, $B = \{1\}$, $f = \emptyset$ und $g = \{(1,1)\}$. Dann ist $f \not\leq g$, aber es ist unmöglich, f so zu erweitern, dass eine zu g inkompatible Funktion entsteht.

Lösung zu Aufgabe 8.7

Es wurde übersehen, dass sich sowohl die Menge, die die Rolle der reellen Zahlen übernimmt, als auch die Mengen, die die Rollen der transfiniten Zahlen oberhalb von $\aleph_0$ übernehmen, im Zuge der Modellerweiterung verändern können. In den beiden Modellerweiterungen, die wir in den Abschnitten 8.2.1 und 8.2.2 konstruiert haben, ist dies gut zu beobachten.

In Abschnitt 8.2.1 haben wir eine σ-vollständige Forcing-Ordnung gewählt, mit der Konsequenz, dass die Menge, die die Rolle von $\mathbb{R}$ übernimmt, in $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}[G]$ dieselben sind. Da die Forcing-Ordnung aber nicht die abzählbare Antikettenbedingung erfüllt, gibt es keine Garantie dafür, dass die Kardinalzahlen gleich bleiben. Genau dies löst den skizzierten Widerspruch auf. In der Modellerweiterung ist die Menge, die in $\mathcal{M}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\aleph_\alpha$ ist, in $\mathcal{M}[G]$ zwar noch vorhanden, sie ist dort aber nur noch eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und einer Menge, die in $\mathcal{M}[G]$ nicht mehr die Rolle von $\aleph_\alpha$ übernimmt.

In Abschnitt 8.2.2 war die Situation komplementär. Die dort verwendete Forcing-Ordnung erfüllt die abzählbare Antikettenbedingung, sodass die Kardinalzahlen in $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}[G]$ dieselben sind. Geändert hat sich die Menge, die die Rolle von $\mathbb{R}$ übernimmt. Auch für diese Modellerweiterung gilt, dass die Menge, die in der Modellerweiterung $\mathcal{M}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\aleph_\alpha$ ist, in $\mathcal{M}[G]$ immer noch vorhanden ist. Sie ist dort aber nur noch eine Bijektion zwischen $\aleph_\alpha$ und einer Menge, die in $\mathcal{M}[G]$ nicht mehr die Menge der reellen Zahlen repräsentiert.