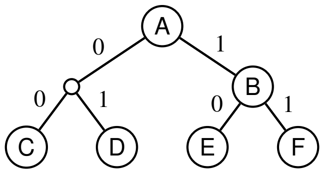
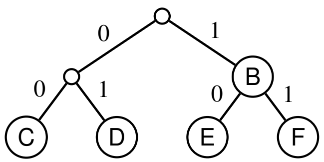
Codierungstheorie
Übungsblatt 1

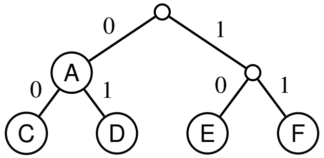
Prof. Dr. Dirk Hoffmann

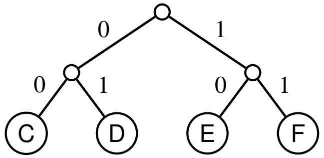
Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Aufgabe 1: Welche der folgenden Codes erfüllen die Fano-Bedingung und welche nicht?

a) 

b) 

c) 

d) 

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um die nachstehenden Codes:

σ	$c_1(\sigma)$	σ	$c_1(\sigma)$
A	00	E	011
B	000	F	100
C	001	G	0000
D	010	H	00000

σ	$c_2(\sigma)$	σ	$c_2(\sigma)$
A	00	E	011
B	000	F	100
C	001	G	0000
D	010	H	0001

σ	$c_3(\sigma)$	σ	$c_3(\sigma)$
A	00	E	011
B	000	F	100
C	001	G	101
D	010	H	0000

a) Zeigen Sie, dass keiner der abgebildeten Codes präfixfrei ist.

b) Lässt sich die Präfixfreiheit herstellen, ohne die Codewortlängen zu verändern?

Aufgabe 3: Im Zusammenhang mit der Kraft'schen Ungleichung haben Sie ein Verfahren kennengelernt, mit dem sich präfixfreie Codes systematisch konstruieren lassen. Ihre Aufgabe ist es, einen präfixfreien Code zu finden, dessen Codewörter die folgenden Längen aufweisen:

$$l_1 = 2,\ l_2 = 2,\ l_3 = 2,\ l_4 = 3,\ l_5 = 4,\ l_6 = 4,\ l_7 = 4$$

a) Wie viele Zeichen muss das Codealphabet nach der Kraft'schen Ungleichung mindestens umfassen, damit ein präfixfreier Code mit den gewünschten Codewortlängen konstruiert werden kann?

b) Führen Sie die Konstruktion mit einem passenden Codealphabet durch.

Aufgabe 4: Bewerten Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen:

	Richtig	Falsch
Jeder präfixfreie Code ist eindeutig decodierbar.	○	○
Jeder eindeutig decodierbare Code ist präfixfrei.	○	○
Jeder Code, der präfixfrei ist, erfüllt die Kraft'sche Ungleichung.	○	○
Jeder Code, der die Kraft'sche Ungleichung erfüllt, ist präfixfrei.	○	○

Aufgabe 5: Berechnen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das linke System über den reellen Zahlen und das rechte über dem Körper $\mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 6: Mit $\mathbb{Z}_2^\infty$ bezeichnen wir die Menge aller Folgen aus Elementen der Menge $\mathbb{Z}_2$:

$$\mathbb{Z}_2^\infty := \{(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \mid x_i \in \{0,1\}\}$$

Die Elemente von $\mathbb{Z}_2^\infty$ können wir uns als unendliche lange Bitvektoren vorstellen.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_2^\infty$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ wird, wenn die Addition zweier Folgen und die Multiplikation einer Folge mit einem Skalar komponentenweise erklärt wird.

b) Ist die Menge $\{(1,0,0,0,\ldots),(0,1,0,0,\ldots),(0,0,1,0,\ldots),\ldots\}$ eine Basis von $\mathbb{Z}_2^\infty$?

Aufgabe 7: Die rechts in Aufgabe 5 vorkommende Matrix ist die Generatormatrix des *erweiterten Hamming-Codes*.

a) Erzeugen Sie die Code-Tabelle des erweiterten Hamming-Codes.

b) Erzeugen Sie die Generatormatrix des dualen Codes.

c) Bringen Sie die in b) erstellte Matrix in reduzierte Form. Was stellen Sie fest?