# Einführung in die Spezielle Relativitätstheorie

Erste Auflage www.dirkwhoffmann.de



## 2

## Historische Notizen

Aufgabe 2.1

In der Mathematik wird ein Tupel  $(M, \circ)$ , bestehend aus einer Menge M und einer binären Operation  $, \circ$ , als *Gruppe* bezeichnet, wenn die folgenden vier Eigenschaften gelten:

- Abgeschlossenheit
  - Für alle  $x, y \in M$  ist  $x \circ y \in M$ .
- Assoziativität
  - Für alle  $x, y, z \in M$  ist  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ .
- Existenz eines neutralen Elements
  - Für ein  $e \in M$  gilt für alle  $x \in M$  die Beziehung  $x \circ e = x$ .
- Existenz inverser Elemente
  - Für alle  $x \in M$  existiert ein Element  $x^{-1} \in M$  mit  $x \circ x^{-1} = e$ .

Eine Gruppe (M, $\circ$ ) heißt *kommutative Gruppe* oder *Abel'sche Gruppe*, wenn sie zusätzlich die folgende Eigenschaft erfüllt:

- Kommutativität
  - Für alle  $x, y \in M$  ist  $x \circ y = y \circ x$ .

Zeigen Sie, dass die Menge der Galilei-Transformationen mit der Komposition ,oʻ, d. h. der Hintereinanderausführung zweier Transformationen, eine Abel'sche Gruppe bildet.

Im Folgenden sind drei Galilei-Transformationen f, f' und f'' gegeben:

$$f(ct,\mathbf{r}) = (ct,\mathbf{r} - \mathbf{v}ct)$$
  
$$f'(ct,\mathbf{r}) = (ct,\mathbf{r} - \mathbf{v}'ct)$$
  
$$f''(ct,\mathbf{r}) = (ct,\mathbf{r} - \mathbf{v}''ct)$$

Wir zeigen nacheinander:

■ Abgeschlossenheit

$$(f' \circ f)(ct, \mathbf{r})$$

$$= (ct, (\mathbf{r} - \mathbf{v}ct) - \mathbf{v}'ct)$$

$$= (ct, \mathbf{r} - (\mathbf{v} + \mathbf{v}')ct)$$

Die Verknüpfung zweier Galilei-Transformationen ist demnach wieder eine Galilei-Transformation (mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\nu + \nu'$ ).

Assoziativität

$$\begin{split} &((f''\circ f')\circ f)(ct, \boldsymbol{r})\\ &=(f''\circ f')(ct, \boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}ct)\\ &=(ct, (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}ct)-(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}'')ct)\\ &=(ct, (\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')ct)-\boldsymbol{v}''ct)\\ &=(f''\circ (f'\circ f))(ct, \boldsymbol{r}) \end{split}$$

- Existenz eines neutralen Elements

  Das neutrale Element ist die Transformation (ct, r 0ct).
- Existenz inverser Elemente

  Die zu  $(ct, \mathbf{r} \mathbf{v}ct)$  inverse Transformation ist  $(ct, \mathbf{r} (-\mathbf{v})ct)$ .
- Kommutativität

$$(f' \circ f)(ct, \mathbf{r})$$

$$= (ct, (\mathbf{r} - \mathbf{v}ct) - \mathbf{v}'ct)$$

$$= (ct, (\mathbf{r} - \mathbf{v}'ct) - \mathbf{v}ct)$$

$$= (f \circ f')(ct, \mathbf{r})$$

Aufgabe 2.2

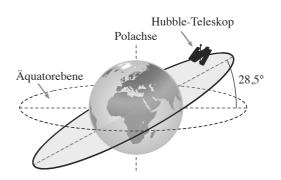


Seit dem Jahr 1998 umkreist die Internationale Raumstation (ISS) die Erde. Sie ist das zurzeit größte künstliche Objekt am Nachthimmel und benötigt ca. 92,7 Minuten für einen Umlauf. Geringfügig länger ist das Hubble-Weltraumteleskop unterwegs. Seine Umlaufzeit beträgt rund 95,8 Minuten.

Das Oskar-prämierte Hollywood-Spektakel *Gravity* beginnt mit einer Szene, die drei Spaceshuttle-Astronauten der NASA bei der Ausführung von Reparaturarbeiten am Hubble-Weltraumteleskop zeigt. Kurze Zeit später werden das Teleskop und das Shuttle

durch die Trümmerteile eines russischen Satelliten zerstört. Die einzigen Überlebenden sind die Biomedizinerin Dr. Ryan Stone und der Astronaut Matt Kowalski, die von Sandra Bullock und George Clooney gekonnt in Szene gesetzt werden. In der Realität hätte die Zerstörung des Shuttles für alle den sicheren Tod bedeutet, doch im Film erscheint am Horizont die ISS, in die sich Stone mit Kowalskis Hilfe in einem dramatisch inszenierten Freiflug in letzter Sekunde hinüberretten kann. In dieser Aufgabe wollen wir uns rechnerisch mit dem Realitätsgehalt des Film-Plots auseinandersetzen.

a) Die Inklination, d.h. die Neigung der Orbitalebene gegenüber der Äquatorebene, beträgt im Falle des Hubble-Teleskops 28,5° und im Falle der ISS 51,6°. Ergänzen Sie die nebenstehende Zeichnung um die Orbitalbahn der ISS und leiten Sie daraus ab, ob ein naher Vorbeiflug der beiden überhaupt möglich ist.



Da der Mittelpunkt eines kreisförmigen Orbits der Erdmittelpunkt ist, müssen sich zwei Orbitalebenen immer schneiden. Es ist zwar äußerst unwahrscheinlich, dass sich Hubble zum Zeitpunkt seiner Zerstörung im Schnittpunkt mit der Orbitalebene der ISS befand, aber dennoch möglich. Anhand der Inklination können wir also keine Aussage über die Plausibilität des Szenarios treffen.

Als Nächstes wollen wir erarbeiten, wie die Umlaufzeit T mit der Orbitalhöhe r und der Bahngeschwindigkeit  $\nu$  zusammenhängt.

b) Schreiben Sie die Formel für die Berechnung der Zentripetalkraft so um, dass darin einmal die Variablen m, v und T vorkommen und ein anderes Mal die Variablen m, r und T.

Die Formel für die Berechnung der Zentripetalkraft lautet:

$$F_Z(m, v, r) = \frac{mv^2}{r} \tag{2.1}$$

Die Umlaufzeit T hängt mit dem Radius r und der Bahngeschwindigkeit v über die Beziehung

$$Tv = 2\pi r$$

zusammen. Hieraus folgt:

$$r = \frac{Tv}{2\pi} \tag{2.2}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{2.3}$$

Damit ist

$$F_Z(m, v, T) \stackrel{(2.1)}{=} \frac{mv^2}{\frac{Tv}{2\pi}} = 2\pi \frac{mv}{T}$$

$$F_Z(m, r, T) \stackrel{(2.1)}{=} \frac{m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = 4\pi^2 \frac{mr}{T^2}$$

c) Ersetzen Sie die linke Seite von Newtons Gravitationsgesetz durch die eben hergeleiteten Ausdrücke. Leiten Sie daraus zwei Formeln ab, mit denen sich aus der Umlaufzeit die Orbitalhöhe und die Bahngeschwindigkeit berechnen lassen.

Aus

$$4\pi^2 \frac{mr}{T^2} = G \frac{Mm}{r^2}$$

folgt:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Und aus

$$2\pi \frac{mv}{T} = G \frac{Mm}{r^2} \stackrel{(2.2)}{=} G \frac{Mm}{\left(\frac{Tv}{2\pi}\right)^2} = 4\pi^2 G \frac{M \cdot m}{T^2 \cdot v^2}$$

folgt:

$$v = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}}$$

d) Benutzen Sie die hergeleiteten Formeln, um die Orbitalhöhe und die Bahngeschwindigkeit der ISS zu ermitteln. Wiederholen Sie die Berechnung für das Hubble-Teleskop.

$$r_{\rm ISS} \approx 6785~{\rm km}$$
 (ca. 407 km über der Erdoberfläche)  $v_{\rm ISS} \approx 7665~\frac{\rm m}{\rm s} \approx 7.7 \frac{km}{s}$  (ca. 558 km über der Erdoberfläche)  $v_{\rm Hubble} \approx 6936~{\rm km}$  (ca. 558 km über der Erdoberfläche)  $v_{\rm Hubble} \approx 7581~\frac{\rm m}{\rm s} \approx 7.6 \frac{km}{s}$ 

Fazit: Obwohl das Hubble-Teleskop und die ISS fast identische Umlaufzeiten aufweisen, befinden sie sich in sehr unterschiedlichen Bahnhöhen. Die ISS befindet sich rund 150 km Tiefer als das Hubble-Teleskop.

e) Im Film steuern Stone und Kowalski die ISS mit einem Düsenrucksack an. Ist dieses Szenario aufgrund Ihrer Berechnungen realistisch?

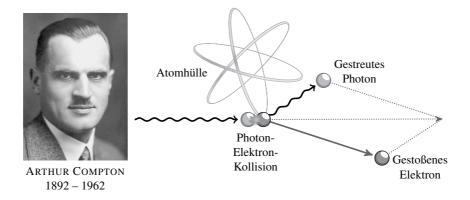
Eine kurze Antwort: Niemals!

f) Gleich zu Beginn des Films fallen auch mehrere Kommunikationssatelliten dem Trümmerhagel zum Opfer, was jedwede Verbindung mit dem Kontrollzentrum in Houston unmöglich macht. Was haben die Filmemacher an dieser Stelle nicht bedacht?

Für die Kommunikation mit der ISS werden unter anderem Satelliten im geostationären Orbit verwendet. Diese befinden sich 35.786 km über dem Erdboden und sind damit um ein Vielfaches höher als das Hubble-Teleskop und die ISS. Diesen Satelliten kann das im Film beschriebene Trümmerfeld nichts anhaben.

#### Aufgabe 2.3

Im Jahr 1922 beobachtete der US-amerikanische Physiker Arthur Compton, dass die Photonen eines hochenergetischen Röntgenstrahls in der Lage sind, Elektronen aus der Hülle von Graphitatomen herauszuschlagen. Bildlich können wir uns den *Compton-Effekt* wie die Kollision zweier Billardkugeln vorstellen:

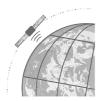


- a) Von wo stammt die kinetische Energie des weggeschleuderten Elektrons?
   Im Zuge der Kollision gibt das Photon einen Teil seiner Energie an das Elektron ab.
- b) Wie wirkt sich dieser Energieverlust auf den gestreuten Lichtstrahl aus?

Nach der Photonenhypothese ist die Energie eines Photons proportional zur Frequenz der Lichtwelle. Folglich sinkt die Lichtfrequenz und genau dies ließ Compton den nach ihm benannten Effekt entdecken.

Unter anderem wird der Compton-Effekt genutzt, um Gamma-Strahlung in einer Nebelkammer sichtbar zu machen. Treten hochenergetische Photonen in eine solche Kammer ein, so schlagen sie Elektronen aus den Hüllen von Gasmolekülen heraus und hinterlassen auf diese Weise eine Spur positiv geladener Ionen. Die Ionen agieren als Kondensationskeime, an denen sich eine sichtbare Nebelspur ausbildet.

Aufaabe 2.4



In dieser Aufgabe betrachten wir die Satelliten des *Global Positioning Systems* (GPS), die auf der L1-Trägerfrequenz 1575,42 MHz ein phasengetastetes Nutzsignal, das sogenannte C/A-Signal, abstrahlen. Wir wollen uns eine räumliche Vorstellung von dieser elektromagnetischen Welle verschaffen.

a) Bestimmen Sie die Wellenlänge des L1-Trägers.

$$\lambda = \frac{c}{1575, 42 \cdot 10^6 \frac{1}{s}} \approx 0,19 \text{ m} = 19 \text{ cm}$$

b) 1540 Schwingungen des Trägersignals codieren einen Chip, die kleinste logische Einheit des C/A-Signals. Die größeren logischen Einheiten sind die Chipsequenzen, die aus jeweils 1023 Chips bestehen. Wieviele Chipsequenzen sendet ein GPS-Satellit pro Sekunde auf die Erde?

$$\frac{1575,42 \cdot 10^6 \frac{1}{s}}{1023 \cdot 1540} = \frac{1575420 \cdot 10^3}{1575420} \frac{1}{s} = 1000 \frac{1}{s}$$

Fazit: Pro Sekunde erreichen genau 1000 Chipsequenzen den Empfänger.

c) Wie viele Meter der Welle entsprechen einer Chipsequenz und wie viele Meter einem einzigen Chip?

Die Übertragung einer einzelnen Chipsequenz dauert genau 1 msec. In dieser Zeit legt das Licht ungefähr 300 km zurück. Ein einzelner Chip entspricht dann  $\frac{300}{1023}$  km, also knapp 293 m.

d) Recherchieren Sie die Orbitalhöhe eines GPS-Satelliten. Wie viele Chipsequenzen passen, räumlich gesehen, auf die Strecke zwischen einem Satelliten und einem GPS-Empfänger?

Ein GPS-Satellit ist ca. 20 200 km von der Erdoberfläche entfernt. Auf dieser Strecke haben ca. 67 Chipsequenzen platz.

e) 20 hintereinander gesendete Chipsequenzen ergeben ein Datenbit des GPS-Signals. Wieviele Datenbits befinden sich, r\u00e4umlich gesehen, gleichzeitig auf der Sendestrecke?

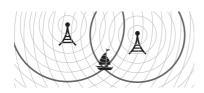
Da 20 Chipsequenzen ein Bit codieren, "befinden" sich ca. 3 Bit zwischen dem Satelliten und dem Empfänger.

f) Wie viele Datenbits kommen pro Sekunde im GPS-Empfänger an?

$$\frac{1000}{20} \frac{\text{Bit}}{\text{s}} = 50 \frac{\text{Bit}}{\text{s}}$$

Dies ist die (magere) Datenrate des GPS-Signals.

Aufgabe 2.5



Viele Schiffe bestimmen ihre Position mithilfe des LORAN-C-Verfahrens. Hierbei werden von fest vermessenen Radiostationen periodische Impulse ausgesandt, die noch in großer Entfernung empfangen werden können.

In der abgebildeten Grafik empfängt ein Schiff die Impulse von zwei Sendestationen. Wird eine Atomuhr mitgeführt, so können an Bord die Laufzeiten der Signale  $t_1$  und  $t_2$  ermittelt und daraus die Distanzen zu den Sendestationen bestimmt werden. Sind die Distanzen bekannt, ergibt sich die Position des Schiffs durch den Schnitt zweier Kreise.

a) Welche Auswirkung hat die spezielle Relativitätstheorie auf die Konstruktion eines LORAN-C-Empfängers?

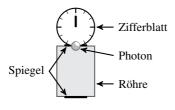
Die Konstruktion wird erheblich vereinfacht. Der Empfänger muss sich nicht um die Bewegung relativ zu einem Medium kümmern und kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit des LORAN-C-Signals ganz einfach als konstant annehmen.

b) Normalerweise haben Schiffe keine Atomuhr an Bord. Anstelle der Laufzeiten  $t_1$  und  $t_2$  ist dann ausschließlich die Laufzeitdifferenz  $t_2 - t_1$  bekannt. Welche Aussage kann die Schiffsbesatzung mit dieser Information über ihre Position treffen?

Die Position ist dann nicht mehr länger auf zwei Punkte, sondern auf eine Linie eingegrenzt. Alle Punkte einer solchen Linie erfüllen die Eigenschaft, dass die Laufzeiten die gleiche Differenz aufweisen. Im englischen werden diese Linien als TD-Linien (time difference lines bezeichnet).

c) Haben Sie eine Idee, warum LORAN-C als eine Hyperbelnavigation bezeichnet wird? Die TD-Linien sind Hyperbeln. Sie haben die gleiche Form wie die Eichkurven in Minkowski-Diagrammen, die Sie später kennenlernen werden.

#### Aufgabe 2.6



In dieser Aufgabe führen wir mehrere Gedankenexperimente mit *Lichtuhren* durch. Eine solche Uhr besteht aus einer Röhre, die an ihrem oberen und unteren Ende durch einen Spiegel begrenzt ist. Betrieben wird die Uhr mit einem Photon, das zwischen den Spiegeln hin und her reflektiert wird. Jedes Mal, wenn das Photon den oberen Spiegel erreicht, springt der Zeiger auf dem Zifferblatt eine Position weiter.

In unserem Gedankenexperiment verwenden wir drei Lichtuhren (A, B und C), von denen sich die Uhren A und B in Ruhe befinden. Die dritte Uhr C bewegt sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit an A und B vorbei. Die folgende Grafik verdeutlicht, wie sich dieses Szenario im Sinne der klassischen Physik darstellen würde:



a) Bestimmen Sie mit einem Lineal die Höhe der Lichtuhren sowie die von C zurückgelegte Strecke. Bestimmen Sie daraus, mit wie viel Prozent der Lichtgeschwindigkeit sich C in dem dargestellten Beispiel von links nach rechts bewegt.

Die Höhe der Lichtuhr beträgt

$$h \approx 1,33 \text{ cm} \approx \frac{4}{3} \text{ cm}$$

In 5 Zeiteinheiten legt das Photon also die Distanz  $2\cdot 5\cdot h=\frac{40}{3}$  cm. Die Lichtuhren A und B sind 8 cm voneinander entfernt. Das bedeutet, dass sich die Uhr C mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{8}{\frac{40}{3}}c = \frac{3}{5}c$$

von A nach B bewegt. Dies entspricht 60 % der Lichtgeschwindigkeit.

b) Die Grafik zeigt, dass das Licht in der bewegten Uhr C einen längeren Weg zurücklegen muss als in den beiden ruhenden Uhren A und B. Um welchen Faktor vergrößert sich der Lichtweg, wenn sich C mit der Geschwindigkeit v von links nach rechts bewegt? Leiten Sie eine Formel ab, mit der sich dieser Faktor ausrechnen lässt.

Es sei t die Zeit, die das Photon benötigt, um von einem Ende der Uhr zum anderen Ende zu gelangen, und l die Höhe der Lichtuhr. Dann gilt:

$$l = c \cdot t \tag{2.4}$$

In der bewegten Uhr muss das Photon in der Zeit t die Strecke l' zurücklegen. In der Zeit t hat sich die Lichtuhr um  $v \cdot t$  nach rechts bewegt, so dass wir mithilfe des Satzes von Pythagoras den folgenden Zusammenhang aufstellen können:

$$l'^{2} = l^{2} + (vt)^{2} \stackrel{(2.4)}{=} l^{2} + \frac{v^{2}l^{2}}{c^{2}}$$
 (2.5)

Der gesuchte Faktor ist der Quotient aus l' und l, den wir jetzt sofort ausrechnen können. Aus (2.5) folgt

$$\frac{l'^2}{l^2} = 1 + \frac{v^2}{c^2}$$

und daraus wiederum:

$$\frac{l'}{l} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

c) Setzen Sie den in Teil a) ermittelten Wert in die hergeleitete Formel ein und berechnen Sie damit den Faktor, um den sich der Lichtweg vergrößert hat. Verifizieren Sie das Ergebnis, indem Sie den zackenförmigen Lichtweg mit einem Lineal nachmessen.

$$\frac{l'}{l} \approx \sqrt{1 + \frac{3^2}{5^2}} \approx 1,166 \approx 1,2$$

Die Messung mit einen Lineal ergibt

$$l' \approx 1.6 \text{ cm}$$

Daraus folgt

$$\frac{l'}{l} \approx \frac{1,6 \text{ cm}}{1,33 \text{ cm}} \approx 1,2$$

d) Wie schnell ist das Photon in dem dargestellten Beispiel in der bewegten Lichtuhr unterwegs?

Die Geschwindigkeit des Photons ist um den Faktor  $\frac{l'}{l}$  erhöht. Sie beträgt dann ca. 1,2c.

Offenbar ist das Ergebnis, das wir mit den Formeln der klassischen Physik erzielt haben, nicht mit den Annahmen der speziellen Relativitätstheorie vereinbar. Nach dem zweiten Einstein'schen Axiom ist die Lichtgeschwindigkeit konstant, so dass ein Photon immer die gleiche Strecke zurücklegt, egal, ob es in den ruhenden Uhren A und B oder der bewegten Uhr C umherläuft. Demnach ist das oben dargestellte Szenario folgendermaßen zu korrigieren:



- e) Was ist auf dem Zifferblatt der bewegten Uhr zu sehen, nachdem diese rechts angekommen ist?
- f) Wir nehmen jetzt an, dass sich C mit Lichtgeschwindigkeit von links nach rechts bewegt. Zeichnen Sie die Bewegungslinie des Photons ein und geben Sie an, was auf dem Zifferblatt zu sehen ist.



Die Bewegungslinie wird zu einer Geraden. Folglich würde das Photon in der bewegten Uhr überhaupt nicht mehr seine Höhe verändern und der Zeiger auf seiner Position verharren. Auf der bewegten Uhr würde die Zeit stillstehen.

g) Als Letztes nehmen wir an, dass sich C noch schneller, d.h. mit Überlichtgeschwindigkeit, von links nach rechts bewegt. Zeichnen Sie die Bewegungslinie des Photons ein und geben Sie an, was auf dem Zifferblatt zu sehen ist.



Die Bewegungslinie lässt sich nicht einzeichnen, da das Photon der bewegten Uhr nicht mehr folgen kann. Dies ist ein erster Hinweis darauf, dass das Überschreiten der Lichtgeschwindigkeiten mit Einsteins zweiten Axiom, dem Prinzip der Konstanz der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, nicht verträglich ist.

Aufgabe 3.1

Im Übungsteil von Kapitel ?? haben Sie gezeigt, dass die Menge der Galilei-Transformationen mit der Komposition ,oʻ, d. h. der Hintereinanderausführung zweier Transformationen, eine Abel'sche Gruppe bildet.

a) Zeigen Sie, dass auch die Menge der eindimensionalen Lorentz-Transformationen eine Abel'sche Gruppe ist.

Lösungshinweis: Verifizieren Sie in einer Nebenrechnung zunächst die folgende Beziehung:

$$\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\beta'^2} = \left(1+\beta\beta'\right)\sqrt{1-\beta_u^2} \quad \text{mit} \quad \beta_u = \frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'}$$

Nebenrechnung:

$$\sqrt{1-\beta'^2}\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\beta'^2-\beta^2+\beta'^2\beta^2}$$

$$= \sqrt{(1+2\beta'\beta+\beta'^2\beta^2) - (\beta'^2+2\beta'\beta+\beta^2)}$$

$$= \sqrt{(1+\beta'\beta)^2 - (\beta'+\beta)^2}$$

$$= \sqrt{(1+\beta'\beta)^2 \left(1 - \frac{(\beta'+\beta)^2}{(1+\beta'\beta)^2}\right)}$$

$$= (1+\beta'\beta)\sqrt{1 - \left(\frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'}\right)^2}$$

$$= (1+\beta'\beta)\sqrt{1-\beta_u^2} \quad \text{mit} \quad \beta_u = \frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'}$$

Im Folgenden sind drei Lorentz-Transformationen f, f' und f'' gegeben:

$$f(ct,x) = (\gamma(ct - \beta x), \gamma(x - \beta ct))$$
  
$$f'(ct,x) = (\gamma'(ct - \beta' x), \gamma'(x - \beta' ct))$$

$$f''(ct,x) = (\gamma''(ct - \beta''x), \gamma''(x - \beta''ct))$$

Alle drei Transformationen sind eindimensional und transformieren entlang der *x*-Achse.

Wir zeigen nacheinander:

#### Abgeschlossenheit

$$\begin{split} &(f'\circ f)(ct,x)\\ &=\left(\gamma'((\gamma(ct-\beta x))-\beta'(\gamma(x-\beta ct))),\gamma'((\gamma(x-\beta ct))-\beta'(\gamma(ct-\beta x)))\right)\\ &=\left(\gamma'\gamma(ct-\beta x-\beta'x+\beta'\beta ct),\gamma'\gamma(x-\beta ct-\beta'ct+\beta'\beta x)\right)\\ &=\gamma'\gamma\left((1+\beta'\beta)ct-(\beta+\beta')x,(1+\beta'\beta)x-(\beta+\beta')ct\right)\\ &=\frac{1}{(1+\beta'\beta)\sqrt{1-\beta_u^2}}\left((1+\beta'\beta)ct-(\beta+\beta')x,(1+\beta'\beta)x-(\beta+\beta')ct\right)\\ &=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}\left(ct-\frac{\beta+\beta'}{1+\beta'\beta}x,x-\frac{\beta+\beta'}{1+\beta'\beta}ct\right)\\ &=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}\left(ct-\beta_u x\right),\frac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}\left(x-\beta_u ct\right)\right)\\ &=(\gamma_u(ct-\beta_u x),\gamma_u(x-\beta_u ct)) \end{split}$$

Fazit: Die Verkettung zweier Lorentz-Transformationen ist ebenfalls eine Lorentz-Transformation.

#### Assoziativität

Die Assoziativität der Lorentz-Transformation ist eine Eigenschaft, die intuitiv sofort einleuchtet, wenn wir an die physikalische Bedeutung der Transformation denken. Um sie rechnerisch zu zeigen, müssen wir uns überlegen, wie sich die Reihenfolge der Verknüpfung auf die Geschwindigkeit auswirkt, die wir weiter oben mit u bzw.  $\beta_u$  bezeichnet haben. Fassen wir den Ausdruck

$$\frac{\beta + \beta'}{1 + \beta \beta'}$$

als die Definition einer Funktion  $u(\beta, \beta')$  auf, dann ist die Assoziativität der eindimensionalen Lorentz-Transformation äquivalent zu der folgenden Aussage:

$$u(\beta, u(\beta', \beta'')) = u(u(\beta, \beta'), \beta'')$$

Die folgende Rechnung zeigt, dass diese Beziehung tatsächlich erfüllt ist:

$$u(\beta, u(\beta', \beta'')) = \frac{\beta + \frac{\beta' + \beta''}{1 + \beta'\beta''}}{1 + \frac{\beta(\beta' + \beta'')}{1 + \beta'\beta''}} = \frac{\beta(1 + \beta'\beta'') + \beta' + \beta''}{1 + \beta'\beta'' + \beta(\beta' + \beta'')}$$

$$\begin{split} &= \frac{\beta\beta'\beta'' + \beta + \beta' + \beta''}{1 + \beta'\beta'' + \beta\beta' + \beta\beta''} \\ &= \frac{\beta + \beta' + \beta'' + \beta\beta'\beta''}{1 + \beta\beta' + \beta\beta'' + \beta'\beta''} \\ &= \frac{\beta + \beta' + \beta''(1 + \beta\beta')}{1 + \beta\beta' + (\beta + \beta')\beta''} = \frac{\frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} + \beta''}{1 + \frac{(\beta + \beta')\beta''}{1 + \beta\beta'}} = u(u(\beta, \beta'), \beta'') \end{split}$$

• Existenz eines neutralen Elements

Das neutrale Element ist die Lorentz-Transformation  $(\gamma(ct - \beta x), \gamma(x - \beta ct))$  mit  $\beta = 0$  ( $\gamma$  ist dann gleich 1).

- Existenz inverser Elemente Die zu  $(\gamma(ct - \beta x), \gamma(x - \beta ct))$  inverse Transformation ist  $(\gamma(ct - (-\beta)x), \gamma(x - (-\beta)ct))$ .
- Kommutativität

$$\begin{split} &(f'\circ f)(ct,x)\\ &=\left(\gamma'((\gamma(ct-\beta x))-\beta'(\gamma(x-\beta ct))),\gamma'((\gamma(x-\beta ct))-\beta'(\gamma(ct-\beta x)))\right)\\ &=\left(\gamma'\gamma(ct-\beta x-\beta'x+\beta'\beta ct),\gamma'\gamma(x-\beta ct-\beta'ct+\beta'\beta x)\right)\\ &=\left(\gamma\gamma'(ct-\beta'x-\beta x+\beta\beta'ct),\gamma\gamma'(x-\beta'ct-\beta ct+\beta\beta'x)\right)\\ &=\left(\gamma((\gamma'(ct-\beta'x))-\beta(\gamma'(x-\beta'ct))),\gamma((\gamma'(x-\beta'ct))-\beta(\gamma'(ct-\beta'x)))\right)\\ &=(f\circ f')(ct,x) \end{split}$$

Damit ist gezeigt, dass die Lorentz-Transformationen in ihrer speziellen eindimensionalen Form eine kommutative Gruppe bilden. In der Literatur wird diese Gruppe als die *spezielle Lorentzgruppe* bezeichnet.

## b) Bildet die Menge der mehrdimensionalen Lorentz-Transformationen ebenfalls eine Gruppe?

Nein! Verantwortlich hierfür ist die Tatsache, dass die Verkettung zweier Transformationen im allgemeinen Fall nicht mehr abgeschlossen ist: Für zwei Transformationen, in denen der Richtungsvektor in eine andere Richtung zeigt, können wir nicht mehr in jedem Fall einen Richtungsvektor finden, der Transformation zusammenfasst. Dies liegt daran, dass die Verkettung zweier solcher Transformationen in den meisten Fällen eine Drehung der Koordinatenachsen zur Folge hat.

Würden wir die Lorentz-Transformation in einer noch allgemeineren Form notieren, die zusätzlich eine Drehung der Achsen einbezieht, so entstünden Transformationen mit 6 Freiheitsgraden. Drei sind durch den Richtungsvektor  $\nu$  gegeben und die anderen

drei durch die Drehwinkel der Koordinatenachsen. Diese Transformation sind bezüglich der Komposition abgeschlossen und erfüllen immer noch alle Gruppeneigenschaften: Sie bilden die *allgemeine Lorentzgruppe*, in der die spezielle Lorentzgruppe als Untergruppe eingebettet ist.

Die Hinzunahme der Drehung hat allerdings Konsequenzen für die Kommutativität. Führen wir zwei Drehungen hintereinander aus, so spielt es eine bedeutende Rolle, in welcher Reihenfolge wir dies tun. Die Drehung ist also eine nichtkommutative Operation und diese Eigenschaft überträgt sich auf die Elemente der allgemeinen Lorentzgruppe. Anders als die spezielle Lorentzgruppe ist die allgemeine Lorentzgruppe nicht mehr kommutativ. Wir fassen zusammen:

- Die eindimensionalen Lorentztransformationen bilden eine kommutative Gruppe: die *spezielle Lorentzgruppe*.
- Die mehrdimensionalen Lorentztransformationen mit Rotation bilden eine nichtkommutative Gruppe: die *allgemeine Lorentzgruppe*.
- Die allgemeine Lorentzgruppe enthält die spezielle Lorentzgruppe als Untergruppe.
- Die mehrdimensionalen Lorentztransformationen ohne Rotation bilden keine Gruppe.
- c) Ist Ihnen aufgefallen, dass Sie als Nebenprodukt Ihrer Lösung eine Formel bewiesen haben, mit der sich zwei relativistische Geschwindigkeiten addieren lassen? Worin unterscheidet sich dieses relativistische Additionstheorem von seiner klassischen Variante?

In unserer Rechnung bezeichnete u die Geschwindigkeit der verketteten Lorentz-Transformation. Mit anderen Worten: u ist die Geschwindigkeit, die aus der relativistischen Addition der Geschwindigkeiten v und v' entsteht. Damit ist die Formel

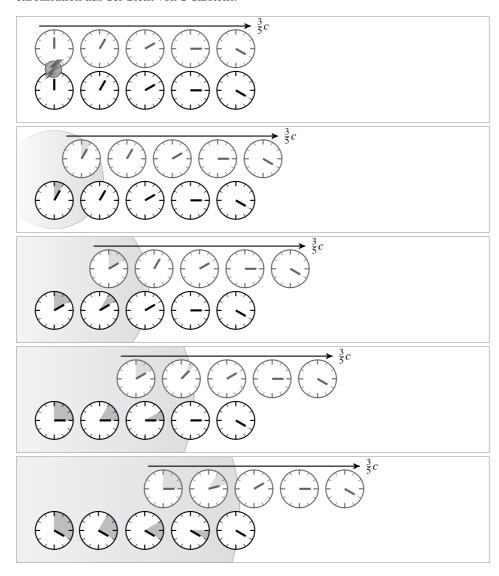
$$\frac{\beta + \beta'}{1 + \beta \beta'} = \frac{\frac{v}{c} + \frac{v'}{c}}{1 + \frac{v}{c}\frac{v'}{c}}$$

die Formel des relativistischen Additionstheorems für Geschwindigkeiten. Sie führt uns eindringlich vor Augen, dass sich Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie nicht, wie es in der klassischen Physik der Fall ist, linear kumulieren.

Aufgabe 3.2

Auf Seite ?? haben wir in Abbildung ?? demonstriert, wie sich die Uhren eines Bezugskörpers S mithilfe einer sich kugelförmig ausbreitenden Lichtwelle synchronisieren lassen. Da sich eine solche Kugelwelle in jedem Inertialsystem in alle Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreitet, kann ein Beobachter in S', der sich relativ zu S in einer gleichförmigen Translationsbewegung befindet, die Uhren seines Bezugskörpers mit

der gleichen Welle synchronisieren. Wir wollen untersuchen, wie sich eine solche Synchronisation aus der Sicht von S darstellt:

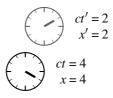


a) Anders als die Uhren von S, scheinen die Uhren von S' nicht synchron zu laufen. Erklären Sie, warum dies zu erwarten war.

Was wir hier sehen, ist die Relativität der Gleichzeitigkeit. Die Uhren eines relativ zu S bewegten Bezugskörpers S' laufen für einen Beobachter in S nicht synchron. Ein Beobachter in S' würde seine eigenen Uhren als synchron wahrnehmen und konstatieren,

dass die Uhren von S nicht synchron zueinander sind.

b) Wir greifen exemplarisch zwei Uhren aus der letzten Momentaufnahme heraus und untersuchen deren Raum-Zeit-Koordinaten:



Zeigen Sie, dass die Lorentz-Transformation die Raum-Zeit-Koordinate (ct,x) auf die Raum-Zeit-Koordinate (ct',x') abbildet.

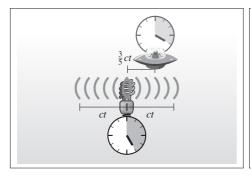
$$ct' = \gamma(ct - \beta x) = \frac{5}{4} \left( 4 - \frac{3}{5} 4 \right) = 5 \left( 1 - \frac{3}{5} \right) = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2$$
$$x' = \gamma(x - \beta ct) = \frac{5}{4} \left( 4 - \frac{3}{5} 4 \right) = 5 \left( 1 - \frac{3}{5} \right) = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2$$

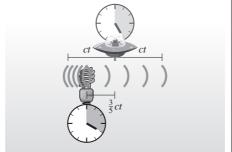
c) Gerade haben Sie bewiesen, dass die Lorentz-Transformation die Raum-Zeit-Koordinaten aufeinander abbildet, und dennoch befinden sich die Uhren in unserer Grafik versetzt nebeneinander. Was könnte die Ursache für diese Unstimmigkeit sein?

Wir haben ein Phänomen nicht berücksichtig, das im nächsten Kapitel ausführlich beschrieben wird: die Raumkontraktion. Um eine exakte Darstellung zu erhalten, hätten wir die Uhren des bewegten Bezugskörpers um den Lorentzfaktor  $\gamma$  zusammenrücken müssen.

Aufgabe 3.3

Die folgenden beiden Momentaufnahmen sind Abbildung ?? entnommen:





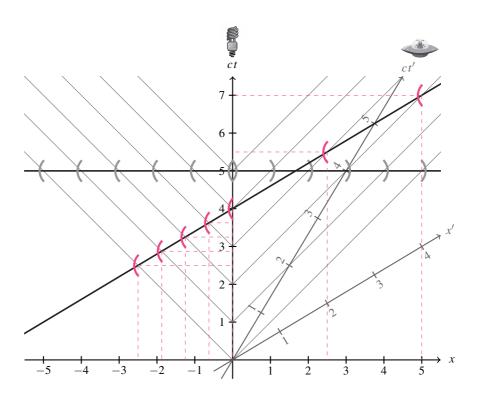
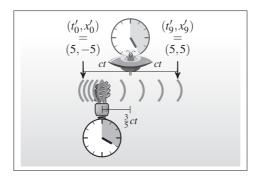


Abbildung 3.1: Minkowski-Diagramm

In Kapitel 2 haben wir dieses Beispielszenario verwendet, um die Auswirkungen des zweiten Einstein'schen Axioms, die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, zu demonstrieren. In dieser Aufgabe gehen wir der Frage nach, ob das rechte Bild korrekt gezeichnet ist. Hierfür werfen wir einen Blick auf das Minkowski-Diagramm in Abbildung 3.1, das die gleichen Wellenberge zeigt, die weiter oben, im linken Bild, zu sehen sind. Da der Zeiger der ruhenden Uhr in der Grafik auf 5 Uhr steht, befinden sich die Wellenberge allesamt auf der Gleichzeitigkeitslinie t=5.

a) Wir betrachten jetzt die rechte Momentaufnahme, die das Szenario aus der Sicht des bewegten Beobachters schildert. In der untenstehenden Grafik sehen Sie, dass der UFO-Pilot damit begonnen hat, jeder Lichtwelle eine Raum-Zeit-Koordinate zuzuordnen. Führen Sie seine Arbeit durch das Ausmessen mit einem Lineal zu Ende.

$$\begin{aligned} &(t'_0, x'_0) = (5, -5) \\ &(t'_1, x'_1) = (5, -4, 5) \\ &(t'_2, x'_2) = (5, -4) \\ &(t'_3, x'_3) = (5, -3, 5) \\ &(t'_4, x'_4) = (t'_5, x_5) = (5, -3) \\ &(t'_6, x'_6) = (5, -1) \\ &(t'_7, x'_7) = (5, 1) \\ &(t'_8, x'_8) = (5, 3) \\ &(t'_6, x'_6) = (5, 5) \end{aligned}$$



b) Übersetzen Sie die Raum-Zeit-Koordinaten mithilfe der Lorentz-Transformation in das System S, das Bezugssystem des Senders:

$$(t_0, x_0) = (\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$$

$$(t_1, x_1) = (2, 875, -1, 875)$$

$$(t_2, x_2) = (3, 25, -1, 25)$$

$$(t_3, x_3) = (3, 625, -0, 625)$$

$$(t_4, x_4) = (t'_5, x_5) = (4, 0)$$

$$(t_6, x_6) = (5, 5, 2, 5)$$

$$(t_7, x_7) = (7, 5)$$

$$(t_8, x_8) = (8, 5, 7, 5)$$

$$(t_9, x_9) = (5, 5)$$

- c) Zeichnen Sie die Raum-Zeit-Koordinaten in das Minkowski-Diagramm in Abbildung 3.1 ein.
- d) Falls Sie richtig gerechnet haben, befinden sich die ermittelten Koordinaten auf einer Linie. Um welche Linie handelt es sich dabei?

Es ist die Gleichzeitigkeitslinie t' = 5.

Aufgabe 3.4

In Abschnitt ?? haben Sie die hyperbelförmigen Invarianzlinien des Minkowski-Diagramms kennengelernt. Wir hatten diese Linien auch als Eichkurven bezeichnet, da sich mit ihnen die eingedrehten Achsen korrekt skalieren lassen. a) Gibt es solche Eichkurven auch in Galilei-Diagrammen?
 Ja

b) Falls ja, wie sehen diese Linien aus?

Die Ortsachsen von S und S' sind identisch und brauchen daher nicht geeicht zu werden. Die Eichkurven der eingedrehten Zeitachse sind die Geraden, die parallel zur Ortsachse verlaufen.

#### 3.1 Relativistische Kinematik

Aufgabe 3.5

Während des 24-Stunden-Rennens von Le Mans rasen die Fahrzeuge mit einer Geschwindigkeit von rund 250 km/h über den Asphalt. Wir wollen das Rennen im Lichte der relativistischen Physik betrachten und von dem vereinfachten Fall ausgehen, dass ein einzelner Fahrer das komplette Rennen bestreitet.



a) Aufgrund der hohen Geschwindigkeit altert der Fahrer während des Rennens langsamer als die Zuschauer. Wie groß ist dieser Effekt?

Nehmen Sie zur Vereinfachung der Rechnung an, dass der Fahrer permanent mit der oben angegebenen Geschwindigkeit unterwegs ist.

Auf der Uhr im Rennwagen verstreicht die Zeit

$$\tau = 24 \text{ h} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
 
$$\approx 23,999999999999999993561 \text{ h}.$$

b) Wie lange müsste das Rennen dauern, damit der Fahren um 1 h weniger altert als die Zuschauer auf den Rängen?

Ungefähr 3,73·10<sup>13</sup> Stunden, was rund 4 Milliarden Jahren entspricht.

Aufgabe 3.6



Vielleicht erinnern auch Sie sich an die Abenteuer, die der Astronaut George Taylor und seine Crew nach einer Bruchlandung ihres Raumgleiters auf dem *Planet der Affen* durchlebten. Anders als in der Romanvorlage von Pierre Boulle waren die Protagonisten in der Verfilmung aus dem Jahr 1968 auf die Erde zurückgekehrt. Dort schrieb man bereits das Jahr 3978 und nichts war mehr so wie im Jahr 1972, als die Weltraumreise begann. In der Zwischenzeit hatten die Menschen ihre Zivilisation in einem globalen Atomkrieg vernichtet und wurden seitdem von Horden intelligenter Affen beherrscht.

Wir wollen in dieser Aufgabe rechnerisch überprüfen, wie realistisch das Phänomen der Zeitdilatation in der Hollywood-Inszenierung nachgezeichnet wurde.

a) Bis zu seiner Bruchlandung auf der Erde war der Raumgleiter im Film 18 Monate unterwegs. Nehmen Sie an, dass er sich die ganze Zeit mit einer konstanten Geschwindigkeit durch den Raum bewegte. Wie groß muss die Geschwindigkeit gewesen sein, damit der Dilatationseffekt in der beschriebenen Größenordnung zustande kommen konnte?

Das Raumschiff hätte mit 0.99999972c fliegen müssen.

b) Die Rechnung in Teil a) war unrealistisch, da der Raumgleiter nicht direkt nach dem Start mit seiner Endgeschwindigkeit fliegen kann. Nehmen Sie an, Taylors Raumgleiter hätte auf der gesamten Reise eine gleichmäßige Beschleunigung erfahren, genau so wie unser fiktives Raumschiff in Abschnitt ??. Wie groß muss die Beschleunigung gewählt werden, damit der beschriebene Dilatationseffekt zustande kommt?

Zur Lösung der Aufgabe benutzen wir das Eigenzeit-Zeit-Gesetz in der Form:

$$\tau(t) = \frac{c}{a_0} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_0 t}{c}\right)$$

Mit

$$t = 2006$$
 a (Zeit auf der Erde)  
=  $2006 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$  s  
 $\tau = 1,5$  a (Zeit auf der Borduhr)  
=  $1,5 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$  s

ergibt dies die Beziehung:

$$1,5 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = \frac{c}{a_0} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{a_0 \cdot 2006 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}}{c} \right)$$

Lösen wir nach  $a_0$  auf, so erhalten wir die Beschleunigung

$$a \approx 64,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ein ungemütlicher Ritt!

c) Auch die Rechnung in Teil b) war nicht realistisch, da das Raumschiff vor der Rückkehr zur Erde abgebremst werden muss. Wie groß muss die Beschleunigung gewählt werden, wenn die Hin- und die Rückreise jeweils in eine Beschleunigungsphase und eine simultan verlaufende Verzögerungsphase aufgeteilt wird?

Da sich die Hin- und die Rückreise nur in der Richtung unterscheiden, aber ansonsten völlig gleichbeschaffen sind, ist die Rechnung wie folgt zu variieren.

$$\frac{1}{2}\tau(t) = \frac{c}{a_0} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_0 \frac{1}{2}t}{c}\right)$$

Dies ergibt die Beziehung:

$$0,75 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = \frac{c}{a_0} \arcsin\left(\frac{a_0 \cdot 1003 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}}{c}\right)$$

Lösen wir nach  $a_0$  auf, so erhalten wir die Beschleunigung

$$a \approx 129,57 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dies entspricht mehr als der dreizehnfachen Erdbeschleunigung.

Aufgabe 3.7

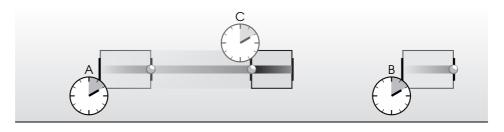
Eine in Internet-Foren gerne geführte Diskussion beschäftigt sich mit der Frage, ob das Phänomen der Raumkontraktion ein realer oder lediglich ein scheinbarer Effekt ist. Letzteres bedeutet, dass es für einen Beobachter nur so aussähe, als würde ein Objekt in seiner Bewegungsrichtung kürzer werden, diese Kontraktion in Wirklichkeit aber gar nicht stattfindet. Warum ist die Frage aus wissenschaftsmethodischer Sicht nicht richtig gestellt?

Bereits in der Frage ist die Annahme versteckt, dass jedes Objekt eine "wirkliche" Länge besitzt, die Länge eines Objekts also eine absolute Größe ist. Einstein hat am Anfang seiner Relativitätstheorie hierzu richtig bemerkt, dass die Länge nur dann zu einem sinntragenden Begriff wird, wenn sie als das Ergebnis eines Messprozesses definiert wird. Bereits die Fragestellung schleust damit einen Widerspruch zu Einsteins Axiomen ein, und so ist es kein Wunder, dass die Diskussionen oftmals in großer Verwirrung enden.

Aufgabe 3.8

Im Übungsteil zu Kapitel 2 haben Sie das Funktionsprinzip der Lichtuhr kennengelernt. An einem konkreten Beispiel hatten wir dort gezeigt, wie sich Einsteins zweites Axiom, die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, auf den Gang einer solchen Uhr auswirkt: Während wir auf den beiden ruhenden Uhren fünf verstrichene Zeiteinheiten ablesen konnten, waren es auf der bewegten Uhr nur vier. Wir wissen mittlerweile, dass jede Bewegung durch den Raum zu einer Dehnung der Zeit führt, und dies bedeutet, dass der geschilderte Effekt auch dann eintreten muss, wenn die Lichtuhren um 90° gedreht werden. Konkret sieht unser Beispielszenario dann folgendermaßen aus:







Beachten Sie, dass die Uhr C durch die Längenkontraktion in der Bewegungsrichtung kürzer geworden ist.

a) Bestimmen Sie mit einem Lineal, wie stark die L\u00e4ngenkontraktion in diesem Beispiel ausf\u00e4llt. Berechnen Sie aus diesem Wert die Geschwindigkeit, mit der sich die Uhr C von A nach B bewegt.

Die Messung mit dem Lineal ergibt:

Länge von Uhr A  $\approx 1,33$  cm Länge von Uhr C  $\approx 1,1$  cm

Fazit: Die Länge von C beträgt ungefähr das 0,8-fache der Länge von Uhr A. Dies entspricht dem Lorentzfaktor

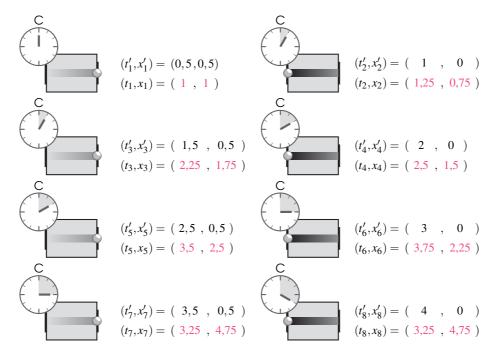
$$\gamma = \frac{5}{4}$$
.

Dieser Wert bedeutet, dass sich die Uhr C mit der Geschwindigkeit

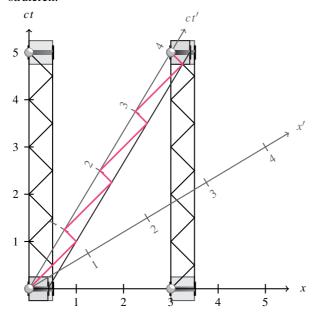
$$v = \frac{3}{5}c$$

bewegt.

b) Wir betrachten das Szenario jetzt aus der Sicht von S'. In den folgenden Grafiken sehen Sie, wie sich das Photon insgesamt viermal hin- und herbewegt. Für jedes abgebildete Ereignis ist zusätzlich die Raum-Zeit-Koordinate angegeben, die ein Beobachter in S' diesem Ereignis zuordnet. Übersetzen Sie die Koordinaten mithilfe der Lorentz-Transformation in das System S, das Ruhesystem der Uhren A und B.

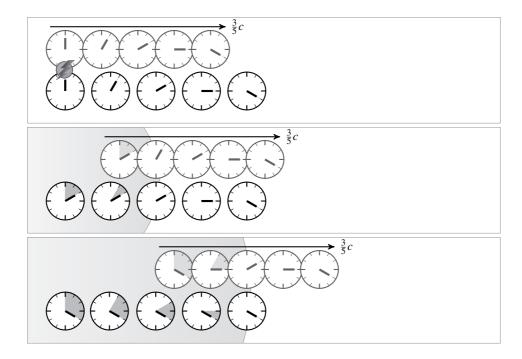


c) Verifizieren Sie Ihre Berechnungen grafisch, indem Sie die Ereignisse in das nachstehende Minkowski-Diagramm eintragen und daraus die Weltlinie des Photons rekonstruieren.



Aufgabe 3.9

Im Übungsteil zu Kapitel 3 haben wir untersucht, wie sich die Uhren zweier relativ zueinander bewegter Bezugskörper verhalten, wenn diese mit der gleichen Kugelwelle synchronisiert werden. Wir haben dort festgestellt, dass zwei Uhren, die sich nach den Formeln der Lorentz-Transformation am gleichen Ort befinden, in der Grafik versetzt eingezeichnet sind. Mit dem mittlerweile erworbenen Wissen können wir die Fehlerstelle leicht ausmachen. Wir hatten die Raumkontraktion ignoriert, die den bewegten Bezugskörper in seiner Bewegungsrichtung um den Lorentzfaktor schrumpfen lässt. Wir wollen das Szenario deshalb erneut betrachten, unter Beachtung der Kontraktion:



 a) Messen Sie mit einem Lineal aus, um welchen Faktor die Uhren des bewegten Bezugskörpers kontrahiert sind. Gleichen Sie das Ergebnis mit dem rechnerisch ermittelten Lorentzfaktor ab.

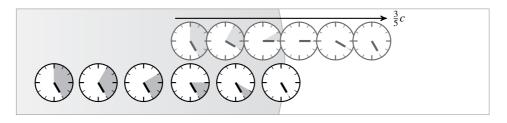
Die Messung mit dem Lineal ergibt:

Abstand der oberen 5 Uhren  $\approx 4,85$  cm Abstand der unteren 5 Uhren  $\approx 3,9$  cm

Fazit: Die unteren Uhren sind in der Grafik um den Faktor 1,2 gestreckt. Dieser Faktor entspricht dem rechnerisch ermittelten Lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3^2}{5^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{5}{4}$$

Wir lassen die Kugelwelle noch ein wenig länger laufen:



b) Aus dieser Momentaufnahme greifen wir die folgenden beiden Uhren heraus:

$$ct' = 5$$

$$x' = 0$$

$$ct = 5$$

$$x = 3$$

Welche Zeit müsste die Uhr des bewegten Bezugskörpers nach den Formeln der Lorentz-Transformation anzeigen?

$$ct' = \gamma(t - \beta x) = \frac{5}{4} \left( 5 - \frac{3}{5} 3 \right) = \frac{1}{4} (25 - 9) = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$$
$$x' = \gamma(x - \beta ct) = \frac{5}{4} \left( 3 - \frac{3}{5} 5 \right) = 0$$

c) Offenbar ist in der grafischen Darstellung immer noch etwas falsch. Was haben wir beim Zeichnen der Uhren nicht bedacht?

Die Zeitdilatation. Die Uhren des bewegten Bezugskörpers laufen langsamer. Zwischen der ersten und der letzten Momentaufnahme sind in unserem Ruhesystem fünf Zeiteinheit vergangen. Dies entspricht  $\frac{4}{5} \cdot 5 = 4$  Zeiteinheiten auf der bewegten Uhr, so dass wir den Zeiger auf die Ziffer 4 zeigen lassen müssen.

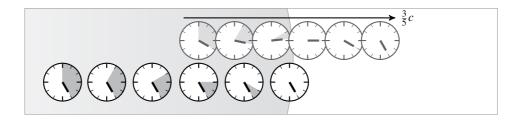
d) Welche Uhren müssen in der zuletzt gezeigten Momentaufnahme ebenfalls korrigiert werden? Berechnen Sie die wahren Zeigerstellungen und zeichnen Sie die letzte Momentaufnahme erneut.

Die Uhren des bewegten Bezugskörpers an der Ortskoordinate  $x'_1 = 1$  und  $x'_2 = 2$  müssen ebenfalls korrigiert werden. Die Ortskoordinaten dieser Uhren sind, aus der Sicht des ruhenden Beobachter zum Zeitpunkt t = 5:

$$x_1 = 3 + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}$$
$$x_2 = 3 + 2\frac{4}{5} = \frac{23}{3}$$

Damit ist:

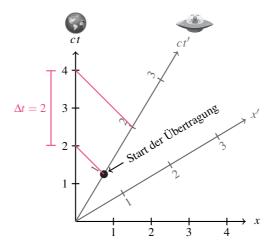
$$ct'_1 = \gamma \left( 5 - \frac{3}{5} \frac{19}{5} \right) = \frac{17}{5}$$
$$ct'_2 = \gamma \left( 5 - \frac{3}{5} \frac{23}{5} \frac{3}{5} \right) = \frac{14}{5}$$



Aufgabe 3.10

Eine Raumschiff entfernt sich mit der Geschwindigkeit  $\frac{3}{5}c$  von der Erde. Der Kapitän des Schiffs berichtet über seine Reise in einer Fernsehübertragung, die auf seiner Borduhr zum Zeitpunkt  $t'_0 = 1$  beginnt und eine Stunde dauert.

a) Tragen Sie das geschilderte Szenario in das folgende Minkowski-Diagramm ein:

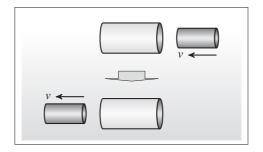


b) Entnehmen Sie dem Diagramm, wie viel Zeit der Fernsehsender einplanen muss, damit die Sendung komplett übertragen werden kann.

Der Fernsehsender muss für die Übertragung 2 Stunden einplanen.

Aufgabe 3.11

In diesem Kapitel haben wir gezeigt, dass die Längenkontraktion einen Körper in dessen Bewegungsrichtung verkürzt. Wir wollen uns in dieser Aufgabe mit den Konsequenzen beschäftigen, die eine Maßstabsveränderung zur Folge hätte, die in alle Richtungen wirkt. Das folgende Szenario zeigt, was in diesem Fall mit zwei gleich gebauten Hohlzylindern passieren würde, von denen einer in unserem eigenen Bezugssystem ruht und sich der andere mit der Geschwindigkeit v auf uns zubewegt:

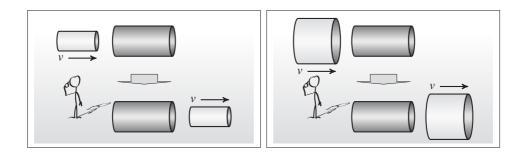


Stellen Sie sich die Situation nun aus der Sicht der bewegten Hohlröhre vor. Welches der folgenden beiden Szenarien würde dann eintreten?

#### Keines!

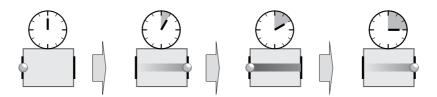
Das linke Szenario widerspricht dem Prinzip der Ereigniskoinzidenz. Es kann nicht sein, dass die gleiche Röhre, die für einen Beobachter innen durch die andere Röhre hindurchgeht, für einen anderen Beobachter außen hindurchgeht.

Das rechte Szenario widerspricht dem Relativitätsprinzip. Es handelt sich um eine symmetrische Situation, d. h. die Raumkontraktion muss für beide in die gleiche Richtung wirken. Es kann nicht sein, dass ein herannehmendes Objekt einmal nach innen geschrumpft und ein anderes Mal nach außen gedehnt wird.

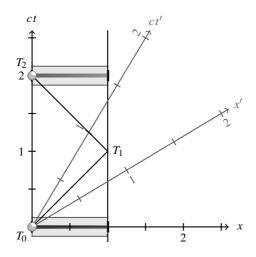


Aufgabe 3.12

In dieser Aufgabe betrachten wir eine Lichtuhr, die ein alternatives Funktionsprinzip verfolgt. Diese Uhr ist so konzipiert, dass sie jedes Mal, wenn das Photon an einem der beiden Spiegel reflektiert wird, den Zeiger auf dem Zifferblatt einen Schritt weiterbewegt:



In dem folgenden Minkowski-Diagramm sind die ersten beiden Schläge einer solchen Uhr grafisch dargestellt. Die eingezeichneten Ereignisse  $T_1$  und  $T_2$  geben an, wann der Zeiger auf die nächste Ziffer springt:



a) Übersetzen Sie die Ereignisse  $T_0$ ,  $T_1$  und  $T_2$  in das System S', das sich mit der Geschwindigkeit  $v = \frac{3}{5}c$  in Richtung der positiven x-Achse bewegt.

$$T'_0 = (ct'_0, x'_0) = (0, 0)$$

$$T'_1 = (ct'_1, x'_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$T'_2 = (ct'_2, x'_2) = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$$

b) Wie groß sind die Zeitintervalle zwischen den Uhrzeigersprüngen aus der Sicht von S'?

Zwischen  $T_0$  und  $T_1$  bzw.  $T_1$  und  $T_2$  vergehen die Zeiten:

$$ct'_1 - ct'_0 = \frac{1}{2}$$
  
 $ct'_2 - ct'_1 = 2$ 

c) Offenbar scheint das alternative Funktionskonzept für einen Beobachter in S' zu versagen. Warum handelt es sich hier um keine richtige Uhr?

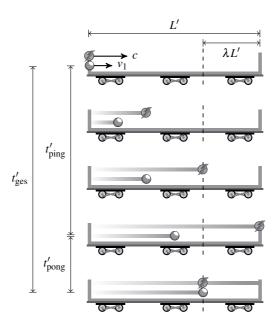
Die Ereignisse, die das Weiterschalten des Zeigers bewirken, finden an zwei verschiedenen Stellen der Uhr statt. Die Relativität der Gleichzeitigkeit sorgt dafür, dass sich die Zeitintervalle aus der Sicht eines bewegten Beobachters gegeneinander verschieben. Als Uhr taugt eine solche Konstruktion daher nicht!

d) Im Gegensatz zu den Lichtuhren, die wir bisher betrachtet haben, ließe sich eine Uhr, wie wir sie gerade beschrieben haben, niemals bauen. Erklären Sie, warum.

Der Beschreibung der Uhr liegt die implizite Annahme zugrunde, dass das Ereignis "Photon erreicht den entfernten Spiegel" unmittelbar das Ereignis "Zeiger wird auf dem Zifferblatt bewegt" auslösen kann. Da die Ereignisse zur gleichen Zeit stattfinden, aber räumlich voneinander getrennt sind, ist dies unmöglich. Formaler ausgedrückt: Wir hätten dann einen Kausalzusammenhang zwischen raumartigen Ereignissen vor uns, den es nicht geben kann.

#### Aufgabe 3.13

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Photon, das in einem Eisenbahnwagon mit einer Kanonenkugel um die Wette läuft. Beide Objekte werden von der linken Wagonwand abgeschossen. Wie die folgende Grafik zeigt, erreicht das Photon das rechte Wagonende zuerst, ändert dort seine Richtung und kollidiert anschließend mit der heranrasenden Kugel:



L' sei die Länge des Wagons und  $v_1$  die Geschwindigkeit der Kugel. Uns interessiert der Ort, an dem das Photon mit der Kugel kollidiert.

a) Zeigen Sie, dass das Teilungsverhältnis  $\lambda$  die folgende Beziehung erfüllt:

$$\lambda = \frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1} \quad \text{mit} \quad \beta_1 = \frac{v_1}{c}$$

Es sei *t* die Zeit, die zwischen dem Start der Geschosse bis zur Kollision vergeht. In dieser Zeit haben das Photon und die Kugel die Strecken

$$c \cdot t = L + \lambda L'$$
$$v_1 \cdot t = (1 - \lambda)L'$$

zurückgelegt. Nach t aufgelöst ergibt dies die Gleichung:

$$v_1(L' + \lambda L') = c(1 - \lambda)L' \tag{3.1}$$

Oder, was dasselbe ist:

$$v_1 + \lambda v_1 = c - \lambda c$$

Hieraus folgt

$$\lambda = \frac{c - v_1}{c + v_1} = \frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1}$$

b) Bestimmen Sie die Zeiten  $t'_{ping}$ ,  $t'_{pong}$  und  $t'_{ges}$ .

$$t'_{\text{ping}} = \frac{L'}{c}$$

$$t'_{\text{pong}} = \frac{\lambda L'}{c}$$

$$t'_{\text{ges}} = \frac{L + \lambda L'}{c} = \frac{L'}{c} \left( 1 + \frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1} \right) = \frac{L'}{c} \left( \frac{2}{1 + \beta_1} \right)$$

Alternative Berechnung von  $t'_{ges}$ :

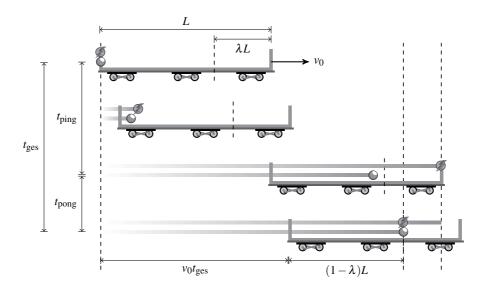
$$t'_{\text{ges}} = \frac{(1-\lambda)L'}{\nu_1} \stackrel{\text{\tiny (3.1)}}{=} \frac{(1-\lambda)L'}{c^{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}} = \frac{(1+\lambda)L'}{c} = \frac{L'}{c} \left(1 + \frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}\right) = \frac{L'}{c} \left(\frac{2}{1+\beta_1}\right)$$

c) Ändert sich das Teilungsverhältnis für einen Beobachter, der das Szenario vom Bahnsteig aus betrachtet und den Zug dort gleichförmig an sich vorbeifahren sieht?

Nein. Maßstäbe können sich ändern, Teilungsverhältnisse nicht.

Aufgabe 3.14

Wir betrachten das Szenario der vorherigen Aufgabe ein zweites Mal, aus der Sicht des Bahnsteigbeobachters. Das Ruhesystem des Bahnsteigs sei S und  $v_0$  die Geschwindigkeit, mit der sich der Zug gleichförmig bewegt. Unser Beispielszenario sieht dann folgendermaßen aus:



Das Photon legt einen längeren Hinweg und einen kürzeren Rückweg zurück. Die Zeiten, die es hierfür benötigt, sind  $t_{ping}$  und  $t_{pong}$ .

### a) Zeigen Sie die folgenden Zusammenhänge:

$$ct_{\text{ping}} = \frac{L}{1 - \beta_0}$$
 und  $ct_{\text{pong}} = \frac{\lambda L}{1 + \beta_0}$  mit  $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$ 

Es gelten die Beziehungen:

$$t_{\text{ping}} = \frac{L + v_0 t_{\text{ping}}}{c} = \frac{L + \beta_0 c t_{\text{ping}}}{c}$$
$$t_{\text{pong}} = \frac{\lambda L - v_0 t_{\text{pong}}}{c} = \frac{\lambda L - \beta_0 c t_{\text{pong}}}{c}$$

Oder, was dasselbe ist:

$$ct_{\text{ping}} - \beta_0 ct_{\text{ping}} = L$$
  
 $ct_{\text{pong}} + \beta_0 ct_{\text{pong}} = \lambda L$ 

Dies ergibt, aufgelöst nach  $t_{ping}$  und  $t_{pong}$ :

$$ct_{\text{ping}} = \frac{L}{1 - \beta_0}$$

$$ct_{\text{pong}} = \frac{\lambda L}{1 + \beta_0}$$

b) Zeigen Sie, dass für die Gesamtzeit  $t_{\rm ges} = t_{\rm ping} + t_{\rm pong}$  Folgendes gilt:

$$ct_{\text{ges}} = 2\gamma^2 L \frac{1 + \beta_1 \beta_0}{1 + \beta_1}$$
 mit  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}$ 

$$ct_{\text{ges}} = ct_{\text{ping}} + ct_{\text{pong}} = \frac{L}{1 - \beta_0} + \frac{\lambda L}{1 + \beta_0}$$

$$= \frac{L}{1 - \beta_0} + \frac{L(1 - \beta_1)}{(1 + \beta_1)(1 + \beta_0)}$$

$$= L\frac{(1 + \beta_1)(1 + \beta_0) + (1 - \beta_1)(1 - \beta_0)}{(1 - \beta_0)(1 + \beta_1)(1 + \beta_0)}$$

$$= L\frac{(1 + \beta_1 + \beta_0 + \beta_1\beta_0 + 1 - \beta_1 - \beta_0 + \beta_1\beta_0)}{(1 - \beta_0^2)(1 + \beta_1)}$$

$$= L\frac{2 + 2\beta_1\beta_0}{(1 - \beta_0^2)(1 + \beta_1)}$$

$$= 2\gamma^2 L\frac{1 + \beta_1\beta_0}{1 + \beta_1}$$
(3.2)

c) Zeigen Sie die Beziehung:

$$\beta_0 c t_{\text{ges}} + (1 - \lambda) L = 2\gamma^2 L \frac{\beta_1 + \beta_0}{1 + \beta_1}$$
 mit  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}$ 

$$\beta_{0}ct_{\text{ges}} + (1 - \lambda)L = 2\gamma^{2}L\frac{\beta_{0} + \beta_{1}\beta_{0}^{2}}{1 + \beta_{1}} + \frac{2\beta_{1}}{1 + \beta_{1}}L$$

$$= 2\gamma^{2}L\left(\frac{\beta_{0} + \beta_{1}\beta_{0}^{2}}{1 + \beta_{1}} + \frac{\beta_{1}}{\gamma^{2}(1 + \beta_{1})}\right)$$

$$= 2\gamma^{2}L\left(\frac{\beta_{0} + \beta_{1}\beta_{0}^{2}}{1 + \beta_{1}} + \frac{\beta_{1}(1 - \beta_{0}^{2})}{1 + \beta_{1}}\right)$$

$$= 2\gamma^{2}L\frac{\beta_{0} + \beta_{1}\beta_{0}^{2} + \beta_{1} - \beta_{1}\beta_{0}^{2}}{1 + \beta_{1}}$$

$$= 2\gamma^{2}L\frac{\beta_{1} + \beta_{0}}{1 + \beta_{1}}$$
(3.3)

d) Leiten Sie aus den erzielten Zwischenergebnissen das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten ab. Überlegen Sie sich hierfür, wie schnell sich die Kugel aus der Sicht von S bewegt.

Aus der Sicht von S legt die Kugel in der Zeit  $t_{\text{ges}}$  die Strecke  $v_0 t_{\text{ges}} + (1 - \lambda)L$  zurück. Damit gilt für ihre Geschwindigkeit:

$$v = \frac{v_0 t_{\text{ges}} + (1 - \lambda)L}{t_{\text{ges}}}$$

Oder, mit  $\beta$  ausgedrückt:

$$\beta = \frac{\beta_0 c t_{\text{ges}} + (1 - \lambda) L}{c t_{\text{ges}}}$$

$$\stackrel{\binom{(3.2)}{(3.3)}}{=} \frac{2 \gamma^2 L \frac{\beta_1 + \beta_0}{1 + \beta_1}}{2 \gamma^2 L \frac{1 + \beta_1 \beta_0}{1 + \beta_0}} = \frac{\beta_1 + \beta_0}{1 + \beta_1 \beta_0}$$

Auf der rechten Seite steht die Formel für die relativistische Addition von Geschwindigkeiten.

e) Hätten wir  $t_{\rm ges}$  nicht einfach durch die Multiplikation von  $t'_{\rm ges}$  mit dem Zeitdilatationsfaktor  $\gamma$  ausrechnen können? Die Größe  $t'_{\rm ges}$  haben wir in der vorherigen Aufgabe mit wenig Aufwand ermittelt.

Nein. Es ist:

$$\gamma c t'_{\text{ges}} = \gamma L' \left( \frac{2}{1+\beta_1} \right) = 2\gamma^2 L \frac{1}{1+\beta_1} \neq 2\gamma^2 L \frac{1+\beta_1 \beta_0}{1+\beta_1} = c t_{\text{ges}}$$

Damit ist  $\gamma t'_{\rm ges} \neq t_{\rm ges}$ . Der Grund ist der Folgende: Wir betrachten hier eine Zeitdifferenz zwischen Ereignissen, die an verschiedenen Orten stattfinden. Die Relativität

der Gleichzeitigkeit sorgt dafür, dass wir Zeitintervalle dann nicht auf die geschilderte Weise umrechnen können. Hätten die Ereignisse (Abschuss und Kollision) am gleichen Ort stattgefunden, so hätte diese Vorgehensweise aber tatsächlich zum Ziel geführt.

# 3.2 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.15



Am 3. Juni 1845 geschah auf der Bahntrasse zwischen Utrecht und Maarssen Eigentümliches. Wieder und wieder pendelte auf einem kurzen Streckenabschnitt ein offener Bahnwagon hin und her, auf dem mehrere Trompeter an einer bestimmten Streckenmarkierung ein G anstimmten.

Die kuriose Szenerie ist Teil eines Experiments, mit dem der niederländische Naturforscher Christoph Buys Ballot die Frequenzverschiebung des Schalls nachweisen wollte, die Christian Doppler rund drei Jahre zuvor aus theoretischen Überlegungen heraus vorhergesagt hatte. Ballot wusste: Wenn es den Doppler-Effekt wirklich gab, so musste ein am Bahnsteig postierter Beobachter einen höheren Ton wahrnehmen, solange sich der Zug auf ihn zubewegt.

a) Ein G hat die Frequenz 392 Hz. Recherchieren Sie die Frequenz des Gis, das einen Halbton höher liegt.

Die Frequenz des Gis beträgt ca. 415 Hz.

b) Wie schnell musste der Zug fahren, damit am Bahnsteig ein Gis zu hören war?

Die Schallgeschwindigkeit beträgt ca. 343  $\frac{m}{s}$ . Damit gilt nach der klassischen Doppler-Formel für eine bewegte Quelle der folgende Zusammenhang:

$$415 \text{ Hz} = \frac{392 \text{ Hz}}{1 - \frac{v}{343 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

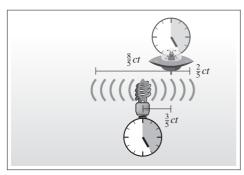
Hieraus folgt

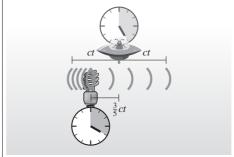
$$\frac{v}{343 \frac{m}{s}} = 1 - \frac{392 \text{ Hz}}{415 \text{ Hz}}$$

und daraus wiederum:

$$v = 343 \frac{m}{s} \left( 1 - \frac{392 \text{ Hz}}{415 \text{ Hz}} \right)$$
$$\approx 19 \frac{m}{s} \approx 68 \frac{km}{h}$$

Die folgenden zwei Grafiken sind Momentaufnahmen, die den Abbildungen ?? und ?? entnommen wurden:





Es handelt sich hier um das Beispielszenario, mit dem wir in Kapitel 2 den Unterschied zwischen der klassischen Physik und der relativistischen Physik dargelegt haben.

a) Leiten Sie aus den Grafiken ab, mit welcher Frequenz der Sender die Lichtwelle emittiert.

In beiden Grafiken emittiert der Sender in jeder Stunde, die auf seiner Uhr vergeht, eine einzige Welle. Die Frequenz beträgt also

$$1 \frac{1}{h}$$

- b) Leiten Sie aus den Grafiken ab, mit welcher Frequenz der Beobachter die nach rechts ausgesendete Lichtwelle wahrnimmt, einmal nach der Vorhersage der klassischen Physik und ein anderes Mal nach der Vorhersage der relativistischen Physik.
  - Klassische Analyse
     In 5 Stunden haben 2 volle Perioden des Lichtsignals den Beobachter passiert. Der Beobachter nimmt die Welle mit der Frequenz <sup>2</sup>/<sub>5</sub> <sup>1</sup>/<sub>h</sub> wahr.
  - Relativistische Analyse
     In 5 Stunden haben 2,5 Perioden des Lichtsignals den Beobachter passiert. Der Beobachter nimmt die Welle daher mit der folgenden Frequenz wahr:

$$\frac{2,5}{5} \frac{1}{h} = \frac{1}{2} \frac{1}{h}$$

c) Verifizieren Sie das Ergebnis rechnerisch.

Klassische Rechnung

Die Quelle ruht, der Beobachter ist bewegt. Damit gilt nach der Doppler-Formel für ruhende Quellen:

$$f_B = f_Q \left( 1 - \frac{v}{c} \right) = 1 \frac{1}{h} \left( 1 - \frac{3}{5} \right) = \frac{2}{5} \frac{1}{h}$$

Relativistische Rechnung

Nach der relativistischen Doppler-Formel ist:

$$f_B = f_Q \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = 1 \frac{1}{h} \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}} = 1 \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2} \frac{1}{h}$$

Aufgabe 3.17



Im Übungsteil zu Kapitel ?? hatten wir ein Raumschiff betrachtet, das sich mit der Geschwindigkeit  $\frac{3}{5}c$  von der Erde entfernte und zum Zeitpunkt  $t_0'=1$  mit der Übertragung eines Fernsehprogramms begann. Zum Zeitpunkt  $t_1'=2$  wurde die Sendung gestoppt. Anhand eines Minkowski-Diagramms sollten Sie ermitteln, wie lange die einstündige Sendung auf der Erde dauerte.

Zeigen Sie, dass sich das erzielte Ergebnis mithilfe der Doppler-Formel viel einfacher finden lässt.

Das Verhältnis zwischen der Sendefrequenz und der Empfangsfrequenz ist das gleiche wie das Verhältnis zwischen der Empfangszeit und der Sendezeit. Nach der Doppler-Formel gilt:

$$\frac{f_Q}{f_B} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2$$

Der Empfang dauert auf der Erde doppelt so lange, also 2 Stunden. Dies ist der gleiche Wert, den wir beim ersten Mal mithilfe des Minkowski-Diagramms ermittelt haben.

Aufgabe 3.18



Ein GPS-Satellit sendet auf der Frequenz 1575,42 MHz. Da sich der Empfänger und der Satellit relativ zueinander bewegen, führt der Doppler-Effekt zu einer Veränderung der Signalfrequenz. In dieser Aufgabe wollen wir abschätzen, wie groß der Einfluss der Erdrotation auf diesen Effekt ist.

a) Wie hoch ist die Bahngeschwindigkeit eines Beobachters, der sich auf der Höhe des Äquators befindet?

Die Bahngeschwindigkeit beträgt ca.

$$1670 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx 464 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) Berechnen Sie die Frequenzverzögerung, die durch diese Geschwindigkeit verursacht wird.

$$\sqrt{\frac{1+\frac{\nu}{c}}{1-\frac{\nu}{c}}} \approx \sqrt{\frac{1+\frac{464\frac{m}{s}}{c}}{1-\frac{464\frac{m}{s}}{c}}} \approx 1,000001547738599$$

Dies führt zu einer Frequenzerhöhung von ca. 2438 Hz, wenn sich Beobachter und Satellit einander nähern, und einer Frequenzverminderung von ca. 2438 Hz, wenn sich Beobachter und Satellit voneinander entfernen.

c) Mussten Sie zur Beantwortung der vorherigen Teilaufgabe auf die klassische oder die relativistische Doppler-Formel zurückgreifen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die relativistische Formel ist korrekt, da wir die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle betrachten. Eine Rolle spielt die Wahl der Formel bei diesen vergleichsweise geringen Geschwindigkeiten aber nicht. Beide liefern ziemlich exakt den gleichen Wert.

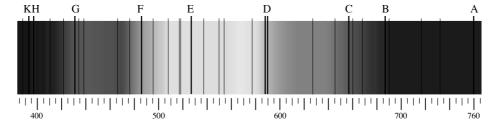
- d) Welche anderen Effekte müssen für die exakte Berechnung des Doppler-Effekts zusätzlich berücksichtigt werden?
  - Die Bewegung des Satelliten relativ zur Sichtlinie.
  - Die Bewegung des Empfängers, falls sich dieser z. B. in einem Auto befindet.

Insgesamt führt dies dazu, dass ein GPS-Empfänger einen Doppler-Effekt von ca.  $\pm 5000\,\mathrm{Hz}$  berücksichtigen muss.

Aufgabe 3.19

Als der US-amerikanische Astronom Vesto Slipher das Teleskop des Lowell-Observatoriums im Jahr 1912 auf die damals bekannten Spiralnebel richtete, machte er eine erstaunliche Entdeckung. Das Spektrum des Andromedanebels war deutlich nach Violett gerückt und nicht, wie die anderen Spektren, nach Rot. Dies konnte nur eines bedeuten: Im Gegensatz zu den anderen Galaxien, die sich allesamt von uns entfernen, bewegt sich die Andromedagalaxie auf uns zu.

Slipher hat die Verschiebung anhand der *Fraunhofer'schen Linien* ausgemessen. Hierbei handelt es sich um charakteristische Auslassungen im Farbenband, die Anfang des 19. Jahrhunderts von William Hyde Wollaston und Joseph von Fraunhofer entdeckt wurden. Von den über 500 Linien, die Fraunhofer identifizierte, sind die folgenden, mit Großbuchstaben markierten, besonders markant:



Um die Geschwindigkeit herauszufinden, mit der sich die Andromedagalaxie auf uns zubewegt, vermaß Slipher in mehreren Spektralaufnahmen die Verschiebung der Fraunhofer'schen Linien und setzte die Werte anschließend in die uns bekannte Doppler-Formel ein. In [?] finden wir die folgende Tabelle, in der Slipher sein Ergebnis festhielt:

Für Slipher war dies ein Ergebnis, dem er zunächst selbst misstraute. Er hatte entdeckt, dass die Andromedagalaxie regelrecht auf uns zurast, mit einer aberwitzigen Geschwindigkeit von 300 km pro Sekunde.



Auf Kollisionskurs mit der Milchstraße: die Andromedagalaxie

a) Rechnen Sie für die vier angegebenen Geschwindigkeiten aus, welchen Wellenlängenversatz Slipher für die Fraunhofer'sche K-Linie gemessen haben muss, die sich am

blauen Rand des Spektrums, bei 393,368 nm, befindet. Wiederholen Sie die Berechnung für die A-Linie am roten Rand des Spektrums, bei 759,370 nm.

Die angegebenen Wellenlängen entsprechen den folgenden Frequenzen:

K-Linie: 
$$f_K = \frac{c}{393,368 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 7,62117 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$
  
A-Linie:  $f_A = \frac{c}{759,370 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 3,94791 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ 

Bei einer Annäherungsgeschwindigkeit von

$$300 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 300000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ergibt dies die folgende Frequenzverschiebung:

K-Linie: 
$$f_K \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = 7,62117 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{c}}{1 - \frac{300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{c}}}} = 7,6288 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$
A-Linie:  $f_A \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = 3,94791 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{c}}{1 - \frac{300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{c}}} = 3,9519 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ 

Dies entspricht den Wellenlängen:

K-Linie: 
$$\lambda_K = \frac{c}{7,6288 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} \approx 392,975 \text{ nm}$$
  
A-Linie:  $\lambda_A = \frac{c}{3.9519 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} \approx 758,610 \text{ nm}$ 

Wir hätten das Ergebnis auch direkter Berechnen können. Da das Verhältnis zwischen der Sendefrequenz und der Empfangsfrequenz ist das gleiche wie das Verhältnis zwischen der empfangenen und der gesendeten Wellenlänge, gilt nach der Doppler-Formel:

$$\begin{aligned} &\text{K-Linie}: \lambda_K' = \lambda_K \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{\nu}{c}}{1 + \frac{\nu}{c}}} = 392,975 \text{ nm} \\ &\text{A-Linie}: \lambda_A' = \lambda_A \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{\nu}{c}}{1 + \frac{\nu}{c}}} = 758,610 \text{ nm} \end{aligned}$$

b) Recherchieren Sie, wie weit die Andromedagalaxie von der Milchstraße entfernt ist, und schätzen Sie mit diesem Wert ab, wann es zur Kollision der beiden Galaxien kommen wird. Die Andromeda-Galaxie ist ca.  $2,5\cdot 10^6$  Lichtjahre von uns entfernt. Damit wird es in ca

$$t = \frac{2.5 \cdot 10^6 \text{ ly}}{300 \frac{\text{km}}{\text{s}}} = \frac{2.46 \cdot 10^6 \cdot 10^{13} \text{ km}}{300 \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 8.2 \cdot 10^{16} \text{ s} \approx 2.6 \cdot 10^9 \text{ a}$$

Fazit: Es kommt in ca. 2,6 Milliarden Jahren zur Kollision.

c) Heute wissen wir, dass die Geschwindigkeit von Slipher etwas zu hoch abgeschätzt wurde und ihr wahrer Wert ca. 266 km/s beträgt. Um wie viele Jahre zögert dies die Kollision gegenüber der eben berechneten Vorhersage hinaus?

$$t = \frac{2.5 \cdot 10^6 \,\text{ly}}{266 \,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = \frac{2.46 \cdot 10^6 \cdot 10^{13} \,\text{km}}{266 \,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = 9.2 \cdot 10^{16} \,\text{s} \approx 2.9 \cdot 10^9 \,\text{a}$$

d) Bedeutet das Zusammentreffen mit der Andromedagalaxie das Ende unseres Sonnensystems?

Nein, die Sterne werden nicht wie Billardkugeln zusammenstoßen. Beide Galaxien werden sich eher miteinander Vermengen als zu Kollidieren. Die Sonne wird sich dann aber ohnehin in einer ihrer letzten Lebensphasen befinden. Die von ihr freigesetzte Energie reicht dann schon lange nicht mehr aus, um auf der Erde Leben zu ermöglichen, wie wir es heute kennen. Somit wird sich wohl kein Mensch mehr an der Veränderung des Nachthimmels erfreuen können, die durch die Vereinigung der beiden Galaxien verursacht wird.

Eine wichtige Notiz am Rande: Slipher erschien die ermittelte Geschwindigkeit so hoch zu sein, dass er am Ende seiner Veröffentlichung etwas ratlos konstatierte:

"The magnitude of this velocity, which is the greatest hitherto observed, raises the question whether the velocity-like displacement might not be due to some other cause, but I believe we have at present no other interpretation for it."

Vesto Slipher [?]

Wenige Jahre nach Sliphers Entdeckung hatte Einstein die allgemeine Relativitätstheorie formuliert und darin aufgezeigt, dass der Doppler-Effekt nur eine von mehreren Ursachen ist, die eine Verschiebung der Spektrallinien hervorruft. Ebenfalls zu berücksichtigen sind die gravitative Rotverschiebung, die wir in Abschnitt ?? besprechen werden, sowie die kosmische Rotverschiebung, auf die wir in diesem Buch nicht eingehen. Während der Doppler-Effekt im Falle der Andromedagalaxie tatsächlich der dominierende Faktor ist und Vesto deshalb zu dem richtigen Ergebnis kam, spielt er bei der Verschiebung der Lichtspektren weit entfernter Galaxien nur eine verschwindend geringe Rolle.

# 3.3 Übungsaufgaben

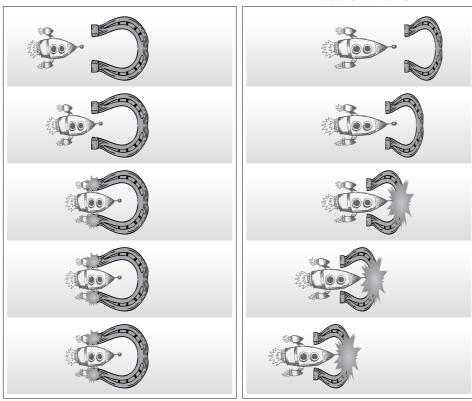
Aufgabe 3.20

In dieser Aufgabe betrachten wir eine Rakete, die mit hoher Geschwindigkeit auf ein Hufeisen prallt. Wir gehen davon aus, dass die Raketenhülle aus so festem Stahl gefertigt ist, dass sie bei der Kollision nicht auseinanderbricht.

Die folgenden Momentaufnahmen machen deutlich, wie sich die Kollision aus dem Ruhesystem des Hufeisens (System S) und dem Ruhesystem der Rakete (System S') darstellt:



Aus der Sicht von S'



Für einen Beobachter in S ist die Rakete aufgrund der Längenkontraktion in der Bewegungsrichtung kürzer, so dass die Triebwerke mit den Enden des Hufeisens kollidieren. Hierdurch wird die Rakete gestoppt, und die Spitze bleibt intakt. In S' scheinen sich die Geschehnisse ganz anders abzuspielen. Dort ist das Hufeisen in der Bewegungsrichtung verkürzt, so dass die Spitze der Rakete mit dem Hufeisen kollidiert und nicht der Antrieb.

Da beide Szenarien nicht gleichzeitig eintreten können, muss mindestens eines der beiden falsch sein. Lösen Sie den entstandenen Widerspruch auf.

Die paradoxe erscheinende Situation wird dadurch hervorgerufen, dass ein kausaler Zusammenhang zwischen zwei raumartigen Ereignissen hergestellt wird. Dass die Spitze der Rakete unbeschädigt bleibt, basiert auf der unausgesprochenen Annahme, dass die Rakete ein perfekter starrer Körper ist und die Kollision der Triebwerke deshalb zu einem sofortigen Stillstand der Spitze führt. Wir wissen aus der Diskussion des Panzerparadoxons, dass es solche starren Körper nicht geben kann, da sich die Bremswirkung dann unendlich schnell und damit insbesondere schneller als das Licht ausbreiten würde. In Wirklichkeit würde etwas ähnliches passieren wie mit dem Panzer über der Grube. Das Raumschiff würde in das Hufeisen hineinfließen und dadurch länger werden (wobei wir uns dies auch hier nicht zu bildlich vorstellen sollten). Sind die Tiefe des Hufeisens und des Raumschiffs in etwa gleich groß, so würden sowohl die Triebwerke als auch die Spitze der Rakete kollidieren.

Aufgabe 3.21



Die Diskussion des Dewan-Beran-Bell-Paradoxons hat gezeigt, dass ein Seil, das zwischen zwei gleichmäßig beschleunigten Raketen gespannt ist, irgendwann reißen wird.

Wir wollen versuchen, das Paradoxon aus einer dritten Perspektive zu betrachten, dem Ruhesystem des Seils.

- a) Geben Sie eine formale Definition für den Begriff des Ruhesystems an.
  - Ein Ruhesystem ist ein Bezugssystem, in dem sämtliche Koordinaten des Körpers konstant bleiben, sich also in Abhängigkeit des Zeitparameters *t* nicht ändern.
- b) Erklären Sie, warum das Seil aus dieser dritten Perspektive reißt, oder begründen Sie, warum eine solche Perspektive gar nicht existiert.

Ein Bezugssystem, in dem das Seil die ganze Zeit ruht, d. h. alle Koordinaten unveränderlich sind, kann es nicht geben. In einem solchen System müsste das linke Ende des Seils stets die gleiche x-Koordinaten aufweisen. Da das linke Ende mit einer der beiden Raketen verbunden ist, müsste das Ruhesystem mit dem Bezugssystem dieser Rakete identisch sein. Dann ist aber, wie wir gesehen haben, das rechte Ende des Seils bewegt, seine Koordinate also nicht konstant. Kurzum: Für einen beschleunigten Körper lässt sich kein Bezugssystem angegeben, in dem der Körper permanent in Ruhe ist.

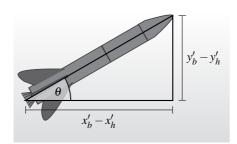
Für Objekte, die in der Bewegungsrichtung einen punktuellen Charakter haben, ihre räumliche Ausdehnung in die Bewegungsrichtung also keine Rolle spielt, ist dies anders. Hier können wir den Begriff des Ruhesystems sinnvoll definieren, nämlich als

jenes Bezugssystem, das zu einem gegebenen Zeitpunkt die gleiche Geschwindigkeit aufweist wie das Objekt selbst. Dieses Bezugssystem ist dann aber kein Inertialsystem.

Ein verwandter Begriff ist der des *momentanen Ruhesystems*. Das momentane Ruhesystem zum Zeitpunkt t ist das Inertialsystem, dass sich mit der Geschwindigkeit bewegt, die das Objekt momentan, d. h. zum Zeitpunkt t, aufweist.

### Aufgabe 3.22

In Abschnitt ?? haben wir das *Maßstabsparadoxon* besprochen und dabei festgestellt, dass sich die im Landeanflug befindliche Rakete aus der Sicht von S' gedreht hat. Wir kamen zu dem folgenden Ergebnis:



$$x'_b - x'_h = l \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \beta_x^2 \right)$$
$$y'_b - y'_h = l \left( \frac{\gamma}{\gamma + 1} \beta_x \beta_y \right)$$

a) Beweisen Sie in einer Nebenrechnung die folgende Beziehung:

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^2 \beta_x^2 \left(\beta_x^2 + \beta_y^2\right) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \beta_x^2$$

Aus

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \beta_x^2 - \beta_y^2}$$

folgt:

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{2} \beta_{x}^{2} \left(\beta_{x}^{2} + \beta_{y}^{2}\right) = \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{2} \beta_{x}^{2} \left(1 - \left(1 - \beta_{x}^{2} - \beta_{y}^{2}\right)\right)$$
$$= \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{2} \beta_{x}^{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma^{2}}\right)$$

$$= \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2} \beta_x^2 \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$$

$$= \frac{\gamma^2 - 1}{(\gamma+1)^2} \beta_x^2$$

$$= \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{(\gamma+1)^2} \beta_x^2$$

$$= \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \beta_x^2$$

b) Zeigen Sie mit dem Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe, dass die Länge der Rakete aus der Sicht von S' um den Kontraktionsfaktor

$$\sqrt{1-\beta_x^2}$$

schrumpft.

Es ist:

$$\frac{l^{2}}{l^{2}} = (x'_{b} - x'_{h})^{2} + (y'_{b} - y'_{h})^{2} = \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma + 1}\beta_{x}^{2}\right)^{2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1}\beta_{x}\beta_{y}\right)^{2}$$

$$= 1 - 2\frac{\gamma}{\gamma + 1}\beta_{x}^{2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1}\beta_{x}^{2}\right)^{2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1}\beta_{x}\beta_{y}\right)^{2}$$

$$= 1 - \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\beta_{x}^{2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1}\right)^{2}(\beta_{x}^{4} + \beta_{x}^{2}\beta_{y}^{2})$$

$$= 1 - \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\beta_{x}^{2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1}\right)^{2}\beta_{x}^{2}(\beta_{x}^{2} + \beta_{y}^{2})$$

$$= 1 - \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\beta_{x}^{2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\beta_{x}^{2}$$

$$= \frac{\gamma + 1 - 2\gamma\beta_{x}^{2} + (\gamma - 1)\beta_{x}^{2}}{\gamma + 1}$$

$$= \frac{(\gamma + 1) - (\gamma + 1)\beta_{x}^{2}}{\gamma + 1}$$

$$= 1 - \beta_{x}^{2}$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung:

$$l' = l\sqrt{(x'_r - x'_l)^2 + (y'_r - y'_l)^2}$$
  
=  $l\sqrt{1 - \beta_x^2}$ 

#### c) Berechnen Sie die Eigenlänge der Landeöffnung.

Es ist:

$$\begin{split} &\left(1+(\gamma-1)\frac{\beta_{x}^{2}}{\beta^{2}}\right)^{2}+\left((\gamma-1)\frac{\beta_{x}\beta_{y}}{\beta^{2}}\right)^{2} \\ &=\frac{(\beta^{2}+(\gamma-1)\beta_{x}^{2})^{2}+((\gamma-1)\beta_{x}\beta_{y})^{2}}{\beta^{4}} \\ &=\frac{\beta^{4}+2\beta^{2}(\gamma-1)\beta_{x}^{2}+(\gamma-1)^{2}\beta_{x}^{4}+(\gamma-1)^{2}\beta_{x}^{2}\beta_{y}^{2}}{\beta^{4}} \\ &=\frac{\beta^{4}+2\beta^{2}(\gamma-1)\beta_{x}^{2}+(\gamma-1)^{2}\beta_{x}^{4}+(\gamma-1)^{2}\beta_{x}^{2}\left(\beta^{2}-\beta_{x}^{2}\right)}{\beta^{4}} \\ &=\frac{\beta^{4}+2\beta^{2}(\gamma-1)\beta_{x}^{2}+(\gamma-1)^{2}\beta_{x}^{2}\beta^{2}}{\beta^{4}} \\ &=\frac{\beta^{2}+\beta_{x}^{2}\left(2(\gamma-1)+(\gamma-1)^{2}\right)}{\beta^{2}} \\ &=\frac{\beta^{2}+\beta_{x}^{2}\left(2\gamma-2+\gamma^{2}-2\gamma+1\right)}{\beta^{2}} \\ &=\frac{\beta^{2}+\beta_{x}^{2}\left(\gamma^{2}-1\right)}{\beta^{2}} \\ &=1+\beta_{x}^{2}\frac{(\gamma^{2}-1)}{\beta^{2}} \\ &=1+\beta_{x}^{2}\gamma^{2} \\ &=\frac{1-\beta^{2}}{1-\beta^{2}}+\frac{\beta_{x}^{2}}{1-\beta^{2}} \\ &=\frac{1-(\beta^{2}-\beta_{x}^{2})}{1-\beta^{2}} \\ &=\frac{1-\beta_{y}^{2}}{1-\beta^{2}} \end{split}$$

Hieraus folgt für die Eigenlänge:

$$l_0 = l\sqrt{\frac{1 - \beta_y^2}{1 - \beta^2}}$$

Aufgabe 3.23

Was passiert, wenn ein Passagier in einem mit Lichtgeschwindigkeit fahrenden Zug nach vorne läuft? Gestellt wurde diese Frage von meinem ehemaligen Physiklehrer, und die Klasse gab damals ganz unterschiedliche Antworten. Manche Schüler waren der Meinung, dass sich die Raumrichtung umkehren würde, andere gaben an, dass die Zeit dann rückwärts liefe. Beides klingt wahrhaft paradox.

#### a) Welche Argumentationslinie könnten die Schüler im Sinn gehabt haben?

Die erste Gruppe argumentierte über die Längenkontraktion. Der Kontraktionsfaktor ist bei v>0 positiv und bei v=c gleich 0. Viele nahmen intuitiv an, dass der Kontraktionsfaktor für den Fall v>c negativ wird. Dass dies falsch ist, wissen wir bereits. Für v>0 ergibt der Lorenzfaktor eine komplexe Zahl, die sich einer physikalischen Interpretation im Sinne der SRT entzieht. Die zweite Gruppe argumentierte genauso, hatte dabei aber nicht die Formel für die Längenkontraktion, sondern die Formel für die Zeitdilatation im Sinn.

#### b) Warum hat es diese Frage verdient, als Fangfrage bezeichnet zu werden?

Die Frage fordert dazu auf, eine Konsequenz aus einer logisch widersprüchlichen Prämisse zu ziehen. Würde sich der Zug tatsächlich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (was er aufgrund der Massenzuname nicht könnte), so stünde die Zeit still und der Zug wäre in seiner Bewegungsrichtung auf die Länge 0 kontrahiert. Unter diesen Umständen wäre das "nach vorne laufen" äußerst schwierig.

# 3.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.24

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit den Auswirkungen der relativistischen Massenzunahme.

a) Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Körper bewegen, damit seine Masse doppelt so groß ist wie seine Ruhemasse?

Wir müssen die folgende Gleichung lösen:

$$2m_0 = \gamma m_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}m_0$$

Die Lösung ergibt

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866025$$

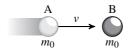
Der Körper müsste sich mit einer Geschwindigkeit bewegen, die bereits sehr nahe an die Lichtgeschwindigkeit herankommt: 86,6 % der Lichtgeschwindigkeit.

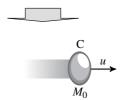
b) Wir nehmen an, ein Flugzeug bewege sich so schnell durch die Luft, dass die Massenzunahme von der Erde aus gemessen werden könnte. Würden wir uns an Bord des Jets dicker fühlen?

Nein. Wir würden diesen Effekt genauso wenig bemerken wie die Zeitdilatation. Wie die Zeit, ist auch die Masse beobachtungsabhängig und darf demnach nicht als eine Größe interpretiert werden, die in einem absoluten Sinne existiert. Aber genau dies suggeriert die Vorstellung, wir würden durch die schnelle Bewegung in einen physiologischen Sinne dicker werden.

Aufgabe 3.25

In Abschnitt ?? haben wir die Formel für die relativistische Massenzunahme über das Prinzip der Impulserhaltung gewonnen. Als gedankliches Anschauungsszenario diente uns der elastische Stoß. In dieser Aufgabe wollen wir uns mit dem unelastischen Stoß auseinandersetzen, bei dem die kollidierenden Objekte nicht mehr länger wie Billardkugeln voneinander abprallen, sondern wachsartig miteinander verschmelzen. Das folgende Bild zeigt das Ergebnis eines solchen Zusammenstoßes:





Wir wollen in dieser Aufgabe der Frage nachgehen, wie groß die Ruhemasse  $M_0$  der neu geformten Kugel C ist, wenn A und B beide vor der Kollision die Ruhemasse  $m_0$  besaßen. Es sei an dieser Stelle vorweg verraten, dass die Ruhemasse  $M_0$  größer ist als die Summe der beiden Ruhemassen. Die sich intuitiv aufdrängende Formel  $M_0 = m_0 + m_0$  wird sich demnach als falsch erweisen. Um den wahren Wert von  $M_0$  zu erfahren, wird Ihnen in dieser Aufgabe abermals das Prinzip der Impulserhaltung weiterhelfen.

a) Begründen Sie, warum die Geschwindigkeit u, mit der sich die neu geformte Kugel bewegt, der Geschwindigkeit  $\overline{v}$  des Mittelsystems entspricht.

Betrachten wir das Szenario aus der Sicht des Mittelsystems, so rasen A und B mit der gleichen Geschwindigkeit aufeinander zu. Da die beiden Kugeln die gleiche Ruhemasse aufweisen, bleibt die neu geformte Kugel C am Platz. Das Mittelsystem ist somit das Ruhesystem von C, so dass sich C aus der Sicht von A oder M mit der Geschwindigkeit des Mittelsystems bewegen muss.

b) Stellen Sie für das gezeigte Szenario die Impulserhaltungsgleichung auf.

Die Einzelimpulse sind:

$$p_A = \gamma_v m_0 v$$

$$p_B = 0$$

$$p_C = \gamma_{\overline{\nu}} M_0 \overline{\nu}$$

Nach dem Prinzip der Impulserhaltung gilt dann:

$$\gamma_{\nu}m_0\nu=\gamma_{\overline{\nu}}M_0\overline{\nu}$$

c) Zeigen Sie in einer Nebenrechnung die folgende Beziehung:

$$\frac{\gamma_{\nu} \cdot \beta_{\nu}}{\gamma_{u}^{2} \cdot \beta_{u}} = 2$$

$$\frac{\gamma_{v} \cdot \beta_{v}}{\gamma_{u}^{2} \cdot \beta_{u}} = \frac{\beta_{v} \cdot \gamma_{v}}{\beta_{\overline{v}} \cdot \gamma_{\overline{v}}^{2}} = \frac{\beta_{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{v}^{2}}}}{\frac{1 - \sqrt{1 - \beta_{v}^{2}}}{\beta_{v}} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \beta_{v}^{2}}}{\beta_{v}}\right)^{2}}$$

$$= \beta_{v}^{2} \frac{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \beta_{v}^{2}}}{\beta_{v}}\right)^{2}}{\left(1 - \sqrt{1 - \beta_{v}^{2}}\right) \cdot \sqrt{1 - \beta_{v}^{2}}}$$

$$= \frac{\beta_{v}^{2} - \left(1 - \sqrt{1 - \beta_{v}^{2}}\right)^{2}}{\sqrt{1 - \beta_{v}^{2}} - 1 + \beta_{v}^{2}}$$

$$= \frac{\beta_{v}^{2} - 1 + 2\sqrt{1 - \beta_{v}^{2}} - 1 + \beta_{v}^{2}}{\sqrt{1 - \beta_{v}^{2}} - 1 + \beta_{v}^{2}}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{1 - \beta_{v}^{2}} - 1 + \beta_{v}^{2}\right)}{\sqrt{1 - \beta_{v}^{2}} - 1 + \beta_{v}^{2}} = 2$$

d) Zeigen Sie mit den Ergebnissen der bereits gelösten Teilaufgaben, dass sich die Ruhemasse  $M_0$  folgendermaßen berechnet:

$$M_0 = 2\gamma_u m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \beta_u^2}}$$

Aus der Impulserhaltungsgleichung folgt:

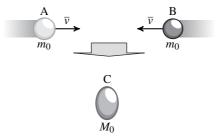
$$M_0 = \frac{\gamma_{\nu} m_0 \nu}{\gamma_{\overline{\nu}} \overline{\nu}} = \frac{\gamma_{\nu} m_0 \nu}{\gamma_{u} u} = \gamma_{u} \frac{\gamma_{\nu} \nu}{\gamma_{u}^2 u} m_0 = \gamma_{u} \frac{\gamma_{\nu} \beta_{\nu}}{\gamma_{u}^2 \beta_{u}} m_0$$

Aus Teilaufgabe c) folgt jetzt sofort:

$$M_0 = 2\gamma_u m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \beta_u^2}}$$

Aufgabe 3.26

Wir wollen das Ergebnis der vorherigen Aufgabe nochmals herleiten, und zwar über das Prinzip der Masse-Energie-Äquivalenz. Für diesen Zweck betrachten wir das Szenario aus der Sicht des Mittelsystems:



a) Welche kinetische Energie weisen die Kugeln A und B vor der Kollision auf?
 Jede Kugel hat die kinetische Energie:

$$E_{\rm kin} = (\gamma_{\overline{\nu}} - 1) m_0 c^2$$

b) Die neu geformte Kugel C hat im Mittelsystem keine kinetische Energie. Wenn wir annehmen, dass die Energie von A und B nicht durch die Entwicklung von Wärme oder Ähnlichem entwichen ist, dann muss sich ihr Verschwinden in einer Massenzunahme von C äußern. Die Ruhemasse  $M_0$  müsste demnach um das Massenäquivalent der kinetischen Energie von A und B größer sein als die Summe der Ruhemassen, es müsste also gelten:

$$M_0 = 2m_0 + 2\frac{E_{\rm kin}}{c^2}$$

Zeigen Sie, dass wir auf diese Weise exakt die Formel erhalten, die wir in der vorherigen Aufgabe über das Prinzip der Impulserhaltung gewonnen haben.

$$M_0 = 2m_0 + 2\frac{E_{\text{kin}}}{c^2}$$

$$= 2m_0 + 2\frac{(\gamma_{\overline{v}} - 1)m_0c^2}{c^2}$$

$$= 2m_0(1 + \gamma_{\overline{v}} - 1)$$

$$= 2\gamma_{\overline{v}}m_0$$

Die im Magnetfeld der Erde gespeicherte Energie liegt in der Größenordnung von einem Exa-Joule (1 EJ).

a) Wie viel trägt das Feld zur Masse der Erde bei?



$$m = \frac{E}{c^2} \approx \frac{1 \text{ EJ}}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \frac{1 \cdot 10^{18} \text{ J}}{9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{100 \text{ J}}{9 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 11,11 \text{ kg}$$

Fazit: Das Magnetfeld "wiegt" rund 11 kg.

b) Angenommen, es gäbe eine Möglichkeit, dieses Reservoir anzuzapfen und die Energie nach und nach zu entnehmen. Hätten wir damit eine Lösung für den stetig wachsenden Energiebedarf der Industrieländer in Händen?

Nein. 1 Exa-Joule (1 EJ) entspricht ca.  $3\cdot 10^{11}$  kWh an Energie. Im Jahr 2013 betrug der Energieverbrauch in Deutschland rund

$$600 \text{ TWh} = 6 \cdot 10^{11} \text{ kWh}.$$

Somit würde die Energiemenge des Magnetfelds gerade einmal ausreichen, um Deutschland ein halbes Jahr lang zu versorgen. Ohnehin wäre das Vorhanben, von seiner technischen Unmöglichkeit abgesehen, keine gute Idee. Das Magnetfeld hat eine schützende Wirkung. Unter anderem schirmt es uns vor einem großen Teil der kosmischen Strahlung ab.

Aufgabe 3.28

Nehmen Sie an, Ihr örtlicher Stromversorger berechnet 0,40 € für jede kWh (Kilowattstunde) verbrauchter Energie. Aufgrund der Äquivalenz von Masse und Energie könnte der Stromanbieter auch in Gramm oder Kilogramm abrechnen. Wie hoch ist die Rechnung eines Kunden, der 1 kg Energie bezogen hat?



1 Joule (J) ist das gleiche wie 1 Wattsekunde (Ws), so dass wir die folgende Rechnung aufstellen können:

$$E = mc^{2} \approx 1 \text{ kg} \cdot 300\,000\,000^{2} \frac{\text{m}^{2}}{\text{s}^{2}}$$

$$= 9 \cdot 10^{16} \text{ J}$$

$$= 9 \cdot 10^{16} \text{ Ws}$$

$$= 25\,000\,000\,000\,000 \text{ Wh}$$

$$= 25\,000\,000\,000 \text{ kWh}$$

$$= 10\,000\,000\,000 \in$$

Fazit: Der Kunde erhält eine Rechnung über 10 Milliarden €.

Aufgabe 3.29



Erinnern Sie sich an den Roman-Bestseller *Illuminati*, in dem der Harvard-Professor Robert Langdon gegen die bevorstehende Zerstörung des Vatikans kämpft? Bedroht wird der kleine Stadtstaat durch eine Antimaterie-Bombe, bestehend aus einem Viertelgramm Antimaterie, das dunkle Mächte aus der Europäischen Organisation für Kernforschung (CERN) entwendet haben.

In Dan Browns packendem Thriller spielt Langdon gegen die Zeit. Das Magnetfeld, das die Antimaterie vor einem Kontakt mit der Umgebung schützt, wird von einer Batterie gespeist, die in weniger als 24 Stunden entladen sein wird.

a) In der Romanerzählung kam die Bombe in einem Helikopter im Luftraum über Rom zur Explosion. Wie viel Energie wurde dabei freigesetzt?

Die Energie eines Viertelgramms Antimaterie entspricht  $2,25\cdot 10^{13}$  J. Da bei der Explosion auch ein Viertelgramm Materie in Energie umgewandelt wird, werden in der Explosion

$$2 \cdot 2.25 \cdot 10^{13} \text{ J} = 4.5 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

freigesetzt.

b) Die Hiroshima-Bombe hatte eine Sprengkraft von rund 15 kT (TNT), was der Energiemenge von 15·4,184·10<sup>12</sup> J entspricht. Vergleichen Sie diese Sprengkraft mit Dan Browns fiktiver Kernwaffe. War der Explosionsort der Antimaterie-Bombe weit genug entfernt, um den Untergang von Rom zu verhindern?

Die in Teil a) ermittelte Energie entspricht ungefähr 11 kT (TNT). Die Bombe hätte damit eine Explosionswirkung entfacht, die in etwa zwei Drittel der Hiroshima-Bombe entspricht. Die Mauern des Vatikans hätten aufgrund der Entfernung zum Zündungsort vielleicht Stand gehalten, für manche Teile von Rom wäre die Zerstörung aber verheerend ausgefallen; deutlich verheerender als es in der Roman-Verfilmung dargestellt wurde, die im Jahr 2009 in die Kinos kam.

c) Die Physiker am CERN sind tatsächlich in der Lage, Antimaterie zu erzeugen. Durch die Teilchenkollisionen im Large Hadron Collider entstehen ca. 10 Millionen Antiprotonen pro Sekunde. Angenommen, diese Teilchen könnten vor dem sofortigen Zerfall bewahrt und genauso problemlos gespeichert werden, wie es Dan Browns Roman suggeriert: Wie lange würde es dauern, bis das Viertelgramm Antiwasserstoff hergestellt wäre, das den Sprengsatz der Bombe bildet?

Ein einzelnes Gramm Antiwasserstoff besteht aus ca.  $6 \cdot 10^{23}$  Atomen. Damit würde die Herstellung  $60\,000\,000\,000\,000\,000\,000$  Sekunden dauern. Dies sind rund 2 Milliarden Jahre. Ein Viertelgramm wäre dann "schon" nach 250 Millionen Jahren fertig.

d) Ist die Konstruktion des Bombenbehälters, der nach dem Prinzip einer *magnetischen Flasche* funktioniert, realistisch dargestellt?

Nein. Um die Antimaterie von der Außenwand des Behälters fernzuhalten, wären starke Magnetfelder notwendig, die sich nicht mit einer kleinen Batterie erzeugen lassen.

Aufgabe 3.30

In der Chemie spielt das *Prinzip der Massenerhaltung* eine fundamentale Rolle. Es wurde das erste Mal im Jahr 1748 durch Michail Wassiljewitsch Lomonossow formuliert und im Jahr 1789 durch den französischen Chemiker Antoine Laurent de Lavoisier zu einem fundamentalen Grundsatz der modernen Chemie erklärt. In Lavoisiers berühmter Arbeit *Traité élémentaire de chimie* finden wir die folgende Passage in französischer Sprache vor:



"Nichts wird bei den Operationen künstlicher oder natürlicher Art geschaffen, und es kann als Axiom angesehen werden, dass bei jeder Operation eine gleiche Quantität Materie vor und nach der Operation existiert."

Antoine Laurent de Lavoisier, 1789 zitiert nach [?]

Müssen wir Lavoisiers Axiom heute als falsch bezeichnen?

Das Prinzip der Massenerhaltung ist genauso richtig oder falsch wie die Newton'sche Physik. Bei der Analyse chemischer Reaktionen dürfen wir Lavoisiers Prinzip deshalb genauso vertrauen wie Newtons Formeln, wenn wir Geschwindigkeiten deutlich unterhalb der Lichtgeschwindigkeit betrachten.

Aufgabe 3.31

Die Energie, die bei der Verbrennung von einem Mol Magnesium (Mg) freigesetzt wird, beträgt:

 $\Delta E = 602 \text{ kJ}$ 

a) Recherchieren Sie die molare Masse von Magnesium und berechnen Sie daraus, wie viel Energie bei der Verbrennung von 100 g Magnesium freigesetzt wird.

Die molare Masse von Magnesium beträgt 24,305  $\frac{g}{Mol}$ . Damit sind in 100 g rund

4,114 Mol

Magnesium enthalten. Die freigesetzte Energie beträgt dann:

$$\Delta E \approx 2477 \text{ kJ}$$

b) Wie groß ist der relativistische Massendefekt bei dieser chemischen Reaktion?

Aus der Formel  $E = mc^2$  ergibt sich der folgende Massendefekt:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \approx \frac{2477\,000\,\mathrm{J}}{299\,792\,458^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 2,756\cdot10^{-11}\,\mathrm{g}$$

c) Tatsächlich wird die Masse größer! Das Magnesiumoxid, das bei der Verbrennung als Reaktionsprodukt entsteht, bringt rund 166 g auf die Waage. Was geht hier vor?

Was wir auf der Waage sehen, hat nichts mit der Relativitätstheorie zu tun, sondern lediglich mit der Tatsache, dass sich die Magnesiumatome bei der Verbrennung (Oxidation) mit Sauerstoffatomen zu Magnesiumoxid-Molekülen verbinden. Die Reaktionsgleichung lautet:

$$2 \text{ Mg} + \text{O}_2 \rightarrow 2 \text{ MgO}$$

Die molare Masse von Magnesium beträgt 24,305  $\frac{g}{Mol}$  und die molare Masse von Sauerstoff beträgt 15,9995  $\frac{g}{Mol}$ . Die Masse von Magnesiumoxid ist damit um den Faktor

$$\frac{24,305+15,9995}{24,305} \approx 1,66$$

größer als die Masse von Magnesium. Fazit: Der Massendefekt, der durch die Energiefreisetzung entsteht, ist so klein, dass wir ihn mit gewöhnlichen Waagen nicht im Ansatz messen können.

Aufaabe 3,32

Im Large Hadron Collider zirkulieren mehrere 100 Protonenpakete gleichzeitig durch den Beschleunigerring. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Protonen an einer Kreuzungsstelle kollidieren, ist dabei äußerst gering. Unter den 115 Milliarden Protonen eines Pakets kommt es durchschnittlich zu gerade einmal 20 Proton-Proton-Kollisionen.

a) Mit welcher Frequenz zirkulieren die Pakete durch die 26659 m lange Röhre?

Die Geschwindigkeit der Protonen beträgt fast c. Dies bedeutet für die Frequenz:

$$f \approx \frac{c}{26659 \text{ m}} \approx \frac{299792458}{26659} \text{ Hz} \approx 11245 \text{ Hz}$$

b) Wie viele Kollisionen finden an einem Kreuzungspunkt pro Sekunde statt, wenn in jeder Richtung 400 Protonenpakete gleichzeitig im Ring umherlaufen.

Es kommt zu ca.

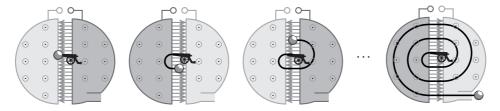
#### $11245 \cdot 400 \cdot 20 \approx 90000000$

Kollisionen pro Sekunde. Trotz der geringen Kollisionswahrscheinlichkeit ist dies eine ganze Menge!

Aufgabe 3.33

Mit dem Large Hadron Collider haben Sie in diesem Kapitel den weltweit leistungsstärksten Teilchenbeschleuniger kennengelernt. Der LHC ist ein sogenanntes *Synchrotron* und fällt damit in die größere Gruppe der *Ringbeschleuniger*. Eine alternative Bauart ist das *Zyklotron*. Hierbei handelt es sich um einen Ringbeschleuniger, in dem sich die atomaren Teilchen auf spiralförmigen Bahnen bewegen.

Die untenstehenden Grafiken skizzieren, wie ein solcher Beschleuniger aufgebaut ist. Er besteht aus einer Vakuumkammer, in die zwei hohle, zu Halbkreisen geformte Elektroden eingelassen sind: die sogenannten *Duanden*. Im Betrieb wird eine hohe Wechselspannung angelegt, die im Zwischenraum, aber nicht innerhalb der Duanden, ein elektrisches Feld erzeugt. In diesem Feld erfahren die Ladungsträger bei jedem Seitenwechsel eine Beschleunigung. Damit sich die Ladungsträger auf einer spiralförmigen Bahn bewegen, wird mit starken Elektromagneten ein homogenes Magnetfeld erzeugt, dessen Feldlinien in unserer Grafik senkrecht zur Zeichenebene verlaufen.



Wird ein Ladungsträger in den Beschleuniger eingebracht, wird er durch die Lorentzkraft auf eine Kreisbahn gezwungen. Durch die Beschleunigung, die er bei jedem Wechsel zwischen den beiden Duanden erfährt, steigt seine Geschwindigkeit immer weiter an, und das bedeutet, dass sich auch der Bahnradius schrittweise vergrößert.

Wir wollen das Funktionsprinzip des Zyklotrons jetzt quantitativ betrachten. Zunächst halten wir fest, dass der Radius der Kreisbahn, auf dem sich ein geladenes Teilchen bewegt, so groß ist, dass sich die Zentripetalkraft und die Lorentzkraft ausgleichen. Folgerichtig gilt die Beziehung:

$$m\frac{v^2}{r} = qvB \tag{3.4}$$

In dieser Gleichung sind r der Radius der Kreisbahn, m, q und v die Masse, die Ladung und die Geschwindigkeit des Teilchens und B die Flussdichte des homogenen Magnetfelds.

a) Zeigen Sie, dass ein geladenes Teilchen immer mit der gleichen Frequenz f rotiert, unabhängig von seiner momentanen Geschwindigkeit und dem momentanen Radius seiner Kreisbahn.

Aus der angegebenen Gleichung folgt:

$$v = \frac{qBr}{m}$$

Damit gilt für die Frequenz f:

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \frac{qB}{m}$$

Die Frequenz ist damit ausschließlich von der Masse und der Ladung des Teilchens sowie der Flussdichte des Magnetfelds abhängig.

b) In der Form (3.4) ist die Formel nur für Teilchen richtig, die sich deutlich langsamer als das Licht bewegen. Wie muss sie für relativistische Geschwindigkeiten korrigiert werden?

Wir müssen die relativistische Massenzunahme berücksichtigen und Gleichung (3.4) damit folgendermaßen korrigieren:

$$\gamma m \frac{v^2}{r} = q v B$$

c) Welche Auswirkung hat dies auf die Umlauffrequenz? Welche Lösung fällt Ihnen für das entdeckte Problem ein?

Es ist:

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \frac{qB}{\gamma m}$$

Die Frequenz sinkt. Bei einer Geschwindigkeit von 0,99c ist sie nur noch 0,14 mal so groß wie die Frequenz, die die klassische Physik vorhersagt.

Die Frequenz, mit der das E-Feld erzeugt wird, kann moduliert werden. Die Frequenz muss mit steigender Geschwindigkeit des Ladungsträgers entsprechend gesenkt werden.

d) Wie wirken sich die relativistischen Effekte auf den Bahnradius aus? Welche Lösung fällt Ihnen für das entdeckte Problem ein?

Es ist:

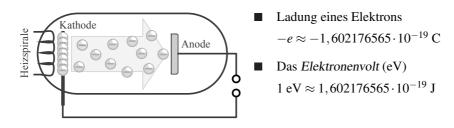
$$r = \frac{v\gamma m}{2\pi qB}$$

Durch die relativistische Massenzunahme ist der Radius um den Lorentzfaktor größer als es die klassischen Formeln der Physik vorhersagen. Bei hohen Geschwindigkeiten müssten daher sehr große Zyklotrone gebaut werden.

Dem Zuwachs des Bahnradius kann durch eine kontinuierliche Erhöhung der magnetischen Flussdichte entgegengewirkt werden.

Aufgabe 3.34

Die folgende Grafik zeigt eine *Diode*, den einfachsten Fall einer *Elektronenröhre*. Hierbei handelt es sich um eine Vakuumröhre, an deren Enden zwei Elektroden eingelassen sind: die *Anode* und die *Kathode*. Wird die Anode mit dem Pluspol und die Kathode mit dem Minuspol einer Spannungsquelle verbunden, so drängen Elektronen in den geheizten Kathodendraht und werden von der Anode angezogen. Ist die angelegte Spannung groß genug, können sich Elektronen von der Kathode lösen und zur Anode überspringen.



Die kinetische Energie eines gelösten Elektrons berechnet sich nach der Formel:

$$E = U \cdot q$$

Hierin ist U ist die angelegte Spannung in Volt, q die Ladung eines Elektrons mit positivem Vorzeichen in Coulomb und E die daraus resultierende Energie in Joule. Dies führt uns direkt zur Einheit Elektronenvolt, von der wir in diesem Kapitel ausgiebig Gebrauch gemacht haben. Per Definition ist 1 eV die Energiezunahme, die ein Elektron erfährt, wenn es eine Beschleunigungsspannung von 1 V durchläuft.

Natürlich erfahren nicht nur Elektronen einen Energiezuwachs, wenn sie eine Beschleunigungsspannung durchlaufen; das Gesagte gilt für alle geladenen Teilchen gleichermaßen.

a) Wie hoch ist die kinetische Energie eines Protons, wenn es die Beschleunigungsspannung von 1 V durchläuft?

Ignorieren wir das Vorzeichen, so hat ein Proton die gleiche Ladung wie ein Elektron. Seine kinetische Energie ist damit ebenfalls 1 eV.

b) Wie hoch ist die kinetische Energie eines Heliumkerns, wenn es die Beschleunigungsspannung von 1 V durchläuft?

In einem Heliumatomkern befinden sich 2 Protonen. Damit ist die kinetische Energie doppelt so hoch wie die eines einzelnes Protons, also 2 eV.

c) Ist die Antwort der vorherigen Teilaufgabe davon abhängig, welches Helium-Isotop wir betrachten?

Nein, die gewonnene kinetische Energie hängt lediglich von der Ladung ab. Die Isotope eines chemischen Elements haben stets die gleiche Ladung und unterscheiden sich lediglich in der Anzahl der Neutronen im Atomkern.

d) Aus 1 kg Körperfett kann der menschliche Körper rund 7000 kCal Energie gewinnen. Wie viel Elektronenvolt entspricht diese Energiemenge?

$$E = 7000 \cdot 4184 \,\mathrm{J} \approx 29288 \cdot 10^3 \,\mathrm{J} \approx 1.83 \cdot 10^{26} \,\mathrm{eV}$$

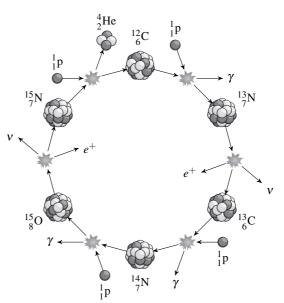
Offenbar ist das Elektronenvolt keine geeignete Einheit für diese großen Energiemengen.

Auf Seite ?? haben Sie die Proton-Proton-Reaktionskette kennengelernt, die bei der Energiegewinnung in der Sonne die Hauptrolle spielt. In Sternen, die deutlich größer sind, dominiert eine Reaktionskette, die von Carl Friedrich von Weizsäcker und Hans Bethe in den Jahren 1938 und v 1939 unabhängig voneinander entdeckt wurde.

Anders als bei der Proton-Proton-Kette handelt es sich dabei um eine zyklische Reaktionskette, in der die 6 Isotope

$$^{12}_{6}$$
C,  $^{13}_{6}$ C,  $^{15}_{8}$ O,  $^{13}_{7}$ N,  $^{14}_{7}$ N,  $^{15}_{7}$ N

als Katalysatoren dienen.



a) Recherchieren Sie die Kernmassen der beteiligten Isotope und tragen Sie die ermittelten Werte in die folgende Tabelle ein:

Isotop	Kernmasse [u]	Isotop	Kernmasse [u]
$^{13}_{7}N$	13,00189857 u	$^{12}_{6}\text{C}$	11,99670852 u
$^{14}_{7}N$	13,99923393 u	$^{13}_{6}\text{C}$	13,00006335 u
<sup>15</sup> <sub>7</sub> N	14,99626880 u	<sup>15</sup> <sub>8</sub> O	14,99867633 u

b) Berechnen Sie die Energiemenge, die beim Durchlaufen des *Bethe-Weizsäcker-Zyklus* freigesetzt wird. Ergänzen Sie hierfür die folgende Bilanzrechnung:

c) Wir haben in der Rechnung noch nicht berücksichtigt, dass die beiden Positronen durch den Kontakt mit Elektronen zerstrahlen. Die Energie des Positrons ist in unserer Bilanz bereits enthalten, nicht aber die Energie der Elektronen, die an den Paarvernichtungen teilnehmen. Korrigieren Sie die Bilanz, indem Sie für jedes zerstrahlte Elektron 0,51 MeV an zusätzlich freigesetzter Energie einrechnen.

$$E_{\text{korrigiert}} = 25,71 \text{ MeV} + 1,02 \text{ MeV} = 26,73 \text{ MeV}$$

d) Vergleichen Sie die Energiebilanz des Bethe-Weizsäcker-Zyklus mit der Energiebilanz der Proton-Proton-Kette. Warum muss bei beiden Reaktionsabläufen, so unterschiedlich sie auch sind, der gleiche Wert herauskommen?

Bei beiden Reaktionsketten werden 4 Protonen zu einem Helium-4-Kern fusioniert. Alle Umwandlungen, die "intern" geschehen, können für die Energiebilanz, die sich von außen betrachtet ergibt, keine Rolle spielen.

Übrigens: Der Bethe-Weizsäcker-Zyklus wird äußerst langsam durchlaufen, da die Wahrscheinlichkeit einer Teilchenkollision gering ist. Im Mittel vergehen mehrere 100 Millionen Jahre, bis ein einzelner Zyklus vollendet ist.

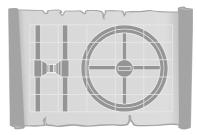
Für die Entdeckung dieser bedeutenden Reaktionskette wurde Hans Bethe im Jahr 1967 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet, "for his contributions to the theory of nuclear reactions, especially his discoveries concerning the energy production in stars".

# 3.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.36

Space Station V ist der Name einer rotierenden Raumstation, die in Stanley Kubricks epochalem Werk 2001: Odyssee im Weltraum imposant in Szene gesetzt wurde. Von der Erde kommende Passagiere nutzen die Station im Film als Umsteigebahnhof, um zum Mond oder zu den anderen Planeten weiterzureisen.

Space Station V besteht aus zwei nebeneinander angeordneten Tori, die mit vier Speichen an einer gemeinsamen Mittelachse befestigt sind. Im Film führt die Station in 61 s eine vollständige Umdrehung aus und erzeugt auf diese Weise ein künstliches Schwerefeld. Auf Konstruktionsplänen wird der Radius der Raumstation mit 984 ft angegeben.



Space Station V

a) Wie hoch ist die Bahngeschwindigkeit am Rand der beiden Tori?

Umrechnung des Radius in Meter:

$$r = \frac{984 \text{ ft}}{2} \approx \frac{300 \text{ m}}{2} = 150 \text{ m}$$

Für die Bahngeschwindigkeit v gilt:

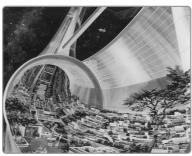
$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi \frac{150 \text{ m}}{61 \text{ s}} \approx 15,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Wie groß ist die künstliche Gravitationskraft am Rand der beiden Tori?

$$a = \frac{F_Z}{m} = \frac{mv^2}{mr} = \frac{v^2}{r} = \frac{15,5^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{150 \text{ m}} \approx 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) Im Film entspricht die Beschleunigung, die ein Passagier am Rand der äußeren Schale erfährt, der Fallbeschleunigung auf der Mondoberfläche. Steht dies im Einklang mit den physikalischen Parametern der Station?

Die Fallbeschleunigung auf dem Mond beträgt mit  $1,62 \, \frac{m}{s^2}$  ziemlich exakt dem Wert, den wir in b) ermittelt haben. In Kubricks Film ist die physikalische Realität demnach korrekt dargestellt.



Stanford-Torus der NASA

Im Jahr 2013 erweckte Hollywood den *Stanford-Torus*, den die NASA in den Siebzigerjahren als Konzeptstudie entwickelt hat, eineastisch perfekt zum Leben. Im Film *Elysium* wohnen in der gleichnamigen Raumstation 500 000 Menschen auf einer Fläche von 375 km². In der rotierenden Raumstation spüren die Bewohner ein künstliches Schwerefeld, in dem sie sich genauso bewegen können wie auf der Erde.

a) Die Bewohner nehmen den besiedelbaren Teil von Elysium als einen langen Streifen mit einer Breite von ca. 2 km wahr. Wie groß ist der Durchmesser des Torus?

$$375 \text{ km}^2 = 2\pi r \cdot 2 \text{ km} \implies r = \frac{1}{2\pi} \frac{375 \text{ km}^2}{2 \text{ km}} \approx 30 \text{ km} = 30000 \text{ m}$$

b) Mit welcher Frequenz muss sich die Raumstation drehen, damit die Fallbeschleunigung auf dem besiedelten Streifen genauso groß ist wie auf der Erde?

Es ist

$$f = \frac{v}{2\pi r} \implies v^2 = (2\pi r)^2 f^2$$

Daraus folgt:

$$a = \frac{F_Z}{m} = \frac{mv^2}{mr} = \frac{(2\pi r)^2 f^2}{r} = (2\pi)^2 r f^2$$

Aufgelöst nach f ergibt dies:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{30000 \text{ m}}} = 0.00287802 \text{ Hz} \approx 10 \frac{1}{\text{h}}$$

Die Raumstation dreht sich ca. 10 mal pro Stunde, d. h. alle 6 Minuten, einmal um sich selbst

c) In den Filmaufnahmen ist zu sehen, dass die Rotationsachse nicht in die Richtung der Erde zeigt. Ist dies ein Problem für die künstliche Schwerkraft?

Nein. Da wir das Gravitationsfeld um Elysium als homogen ansehen dürfen, befindet sich die Raumstation in ihrer Umlaufbahn um die Erde im freien Fall. Es ist daher unerheblich, in welche Richtung die Achse ausgerichtet ist.

d) Im Gegensatz zur Konzeptstudie der NASA, die einen geschlossenen Torus vorsieht, ist Elysium nach innen geöffnet. Raumschiffe von der Erde können dort also problemlos landen oder starten. Ist eine solche Konstruktion realistisch im Hinblick auf die Sauerstoffversorgung der Bevölkerung?

Ein Schwerefeld wirkt auch die Luftmoleküle; andernfalls würde auf der Erde längst keine Atmosphäre mehr existieren. Die seitlichen Toruswände sind im Film jedoch so niedrig, dass in der Praxis dennoch ein großer Teil des Sauerstoffs entweichen würde. Hier wurde in der Hollywood-Produktion also ein wenig übertrieben, um die optischen Effekte besser zur Geltung zu bringen.

### Aufgabe 3.38



KARL SCHWARZSCHILD 1873 – 1916

In diesem Kapitel haben Sie den Schwarzschild-Radius kennengelernt, der für einen Körper der Masse *M* folgendermaßen definiert ist:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

 a) Verifizieren Sie, dass die angegebene Größe die Dimension einer Länge hat.

$$\frac{\left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}\right][kg]}{\left[\frac{m^2}{s^2}\right]} = \frac{\left[m^3\right]}{\left[m^2\right]} = [m]$$

b) Berechnen Sie die Schwarzschild-Radien für die folgenden aus [?] entnommenen Beispiele:

	Masse M	$R_S$
Atomkern:	$10^{-26}  \mathrm{kg}$	$10^{-53} \text{ m}$
Mensch:	$10^2  \mathrm{kg}$	$10^{-25} \text{ m}$
Galaxie:	$10^{41} \text{ kg}$	$10^{14} \text{ m}$

Übrigens: Der Schwarzschild-Radius, der in diesem Buch nur eine untergeordnete Rolle spielt, ist eine fundamentale Größe in der Theorie der Schwarzen Löcher. In der Astronomie wird ein Raumbereich als Schwarzes Loch bezeichnet, wenn die dort wirkenden Gravitationskräfte so hoch sind, dass weder ein materielles Objekt noch das Licht daraus entweichen kann.

Schwarze Löcher entstehen durch stark komprimierte Massen, und der Schwarzschild-Radius gibt Auskunft darüber, wie hoch die Verdichtung mindestens sein muss, damit die Schwerkraft die erforderliche Stärke erreicht. Das bedeutet konkret: Verteilt sich eine Masse M auf eine Kugel, deren Radius kleiner als der Schwarzschild-Radius ist, so übersteigt die Fluchtgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit, die notwendig ist, um dem Gravitationsfeld zu entkommen, die Lichtgeschwindigkeit. Eine solche Masse bildet dann ein Schwarzes Loch.

Aufgabe 3.39



Im Februar 1960 wurde der *Jefferson Tower* auf dem Campus der Harvard University zum Schauplatz eines bedeutenden Experiments. Der Physikprofessor Robert Pound installierte dort zusammen mit seinem Doktoranden Glen Rebka eine aufwendige Konstruktion, mit der sich Gammastrahlen einer exakt spezifizierten Frequenz durch das Innere einer heliumdurchströmten Polyesterröhre senden ließen.

In ihrem Experiment nutzten Pound und Rebka einen zwei Jahre vorher von Rudolf Mößbauer entdeckten Effekt aus, mit dem sich winzige Frequenzverschiebungen detektieren lassen. Die Messgenauigkeit war so groß, dass sich die gravitative Rotverschiebung in einem terrestrischen Experiment nachweisen lassen müsste, und nichts Geringeres war das Ziel der beiden Physiker.

Pound und Rebka führten ihr Experiment über einen Zeitraum von zehn Tagen durch und wechselten dabei mehrmals die Position des Emitters und des Empfängers. Die Ergebnisse der ersten vier Tage können wir detailliert in der Publikation aus dem Jahr 1961 nachlesen [?]:

Period	Shift observed	Temperature correction	Net shift	
	Source at b	oottom		
Feb. 22, 5 p.m.	$-11.5 \pm 3.0$	-9.2	$-20.7 \pm 3.0$	
· -	$-16.4 \pm 2.2^{a}$	-5.9	$-22.3 \pm 2.2$	
	$-13.8 \pm 1.3$	-5.3	$-19.1 \pm 1.3$	
	$-11.9 \pm 2.1^{a}$	-8.0	$-19.9 \pm 2.1$	
	$-8.7 \pm 2.0^{a}$	-10.5	$-19.2 \pm 2.0$	
Feb. 23, 10 p.m.	$-10.5 \pm 2.0$	-10.6	$-21.0 \pm 2.0$	
		Weighted average = $-19.7 \pm 0.8$		
	Source at	t top		
Feb. 24, 0 a.m.	$-12.0 \pm 4.1$	-8.6	$-20.6 \pm 4.1$	
	$-5.7 \pm 1.4$	-9.6	$-15.3 \pm 1.4$	
	$-7.4 \pm 2.1^{a}$	-7.4	$-14.8 \pm 2.1$	
	$-6.5 \pm 2.1^{a}$	-5.8	$-12.3 \pm 2.1$	
	$-13.9 \pm 3.1^{a}$	-7.5	$-21.4 \pm 3.1$	
	$-6.6 \pm 3.0$	-5.7	$-12.3 \pm 3.0$	
Feb. 25, 6 p.m.	$-6.5 \pm 2.0^{a}$	-8.9	$-15.4 \pm 2.0$	
	$-10.0 \pm 2.6$	-7.9	$-17.9 \pm 2.6$	
		Weighted av	$rerage = -15.5 \pm 0.8$	
		Mean	$n \text{ shift} = -17.6 \pm 0.6$	
		Difference of averages = $-4.2 \pm 1.1$		

<sup>&</sup>lt;sup>a</sup>These data were taken simultaneously with a sensitivity calibration.

Die ersten beiden Messreihen wurden mit einem Sender durchgeführt, der am Boden installiert war, und die dritte und vierte mit einem Sender an der Decke. In der zweiten Spalte (*Shift observed*) sind die gemessenen Frequenzverschiebungen  $\frac{\Delta f}{f}$  zusammengefasst. Wie sich die Temperaturdifferenz zwischen Emitter und Empfänger auf die Frequenz auswirkt, ist in der dritten Spalte (*Temperature correction*) vermerkt, und die vierte Spalte (*Net shift*) enthält die damit korrigierten Werte.

a) Der Abstand zwischen Emitter und Empfänger betrug 22,56 m. Berechnen Sie für diesen Wert die zu erwartende Frequenzverschiebung  $\frac{\Delta f}{f}$ .

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{g}{c^2} l = \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \cdot 22,56 \text{ m} \approx 2,46 \cdot 10^{-15}$$

Hinweis: Die Frequenzverschiebungen, die die von uns verwendete Formel mit einem positiven Vorzeichen belegt, sind in der Publikation von Pound und Rebka mit einem negativen Vorzeichen versehen und umgekehrt.

b) Sicher haben Sie bemerkt, dass der von Ihnen ermittelte Wert deutlich kleiner ist als die Werte, die Pound und Rebka in den beiden mit "Weighted average" markierten Zeilen aufgelistet haben. Offensichtlich wird die gravitative Frequenzverschiebung noch von anderen Effekten überlagert. Wie konnten Pound und Rebka diese zusätzlichen Effekte eliminieren? Die letzte Zeile in der Tabelle kann Ihnen den entscheidenden Hinweis darauf geben. Pound und Rebka haben die Differenz der Frequenzverschiebungen betrachtet. Sie wussten: Ist die Relativitätstheorie korrekt, so muss dieser Wert der gravitativen Rotverschiebung eines Experiments entsprechen, das in einem Turm der doppelten Höhe durchgeführt wird.

c) Die Differenz der Durchschnittswerte (*Difference of averages*) betrug im Pound-Rebka-Experiment

$$-4.2 \cdot 10^{-15} \text{ Hz}.$$

Welchen Wert sagt die Relativitätstheorie voraus?

Mit der doppelten Turmhöhe

$$l' = 2l = 45, 12 \text{ m}$$

gilt:

$$\frac{\Delta f'}{f'} = \frac{g}{c^2} 2l = \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{c}^2}} \cdot 45,12 \text{ m} \approx 2 \cdot 2,46 \cdot 10^{-15} = 4,92 \cdot 10^{-15}$$

d) Die über alle Messreihen gemittelte Differenz der Durchschnittswerte ergab

$$(-5, 13 \pm 0, 51) \cdot 10^{-15} \text{ Hz}.$$

Wie stark weicht dieser Wert von der theoretischen Vorhersage ab?

Der Quotient aus der gemessenen und der vorhergesagten Frequenzverschiebung ergibt:

$$\frac{(5,13\pm0,51)\cdot10^{-15}}{4,92\cdot10^{-15}} = \frac{5,13}{4,92} \pm \frac{0,51}{4,92} \approx 1,05\pm0,10$$