Alle Begriffe aus Definition 2.8 lassen sich auf Mengen von aussagenlogischen Formeln erweitern. Eine Menge $M = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ heißt erfüllbar, wenn eine Interpretation I existiert, die für alle $\varphi_i \in M$ ein Modell ist. Die Unerfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit von Formelmengen definieren wir analog. M ist unerfüllbar, wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ kein gemeinsames Modell besitzen. Ist dagegen jede Interpretation ein Modell für die Elemente von M, so nennen wir M allgemeingültig.

Mit der Modellrelation in Händen sind wir gerüstet, um den Begriff der *logischen Folgerung* formal zu definieren:

Definition 2.9 (Logische Folgerung)

Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ aussagenlogische Formeln. Wir schreiben

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi,$$

wenn jedes Modell von $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ auch ein Modell von ψ ist.

Vereinbaren wir zusätzlich die beiden Kurzschreibweisen

$$\models \psi \quad \text{für} \quad \emptyset \models \psi$$
$$\varphi \models \psi \quad \text{für} \quad \{\varphi\} \models \psi$$

so sind die folgenden Zusammenhänge offensichtlich:

- $\models \psi$ gilt genau dann, wenn ψ allgemeingültig ist.
- $\varphi \models \psi$ gilt genau dann, wenn $\varphi \to \psi$ allgemeingültig ist.
- $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$ gilt genau dann, wenn $\{\varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi_1 \to \psi$.

- $\varphi_1 := \underbrace{(\mathsf{A} \to \mathsf{B})}_{\psi_1} \to \underbrace{(\mathsf{B} \to \mathsf{A})}_{\psi_2}$

A	B	ψ_1	ψ_2	φ_1
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

- $\varphi_2 := \underbrace{(\mathsf{A} \vee \mathsf{B})}_{\psi_3} \to \underbrace{(\mathsf{B} \vee \mathsf{A})}_{\psi_4}$

A	B	ψ_3	ψ_4	φ_2
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

- $\varphi_3 := \underbrace{(\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{A})}_{\psi_5} \to \underbrace{(\mathsf{B} \wedge \neg\mathsf{B})}_{\psi_6}$

A	B	ψ_5	ψ_6	φ_3
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

Abbildung 2.8: Wahrheitstafeln zusammengesetzter Formeln

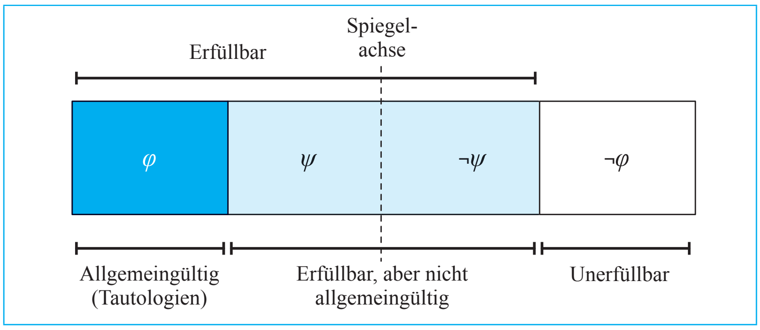

Abbildung 2.9: Das Spiegelungsprinzip visualisiert, wie sich die Eigenschaften der Formeln φ und $\neg\varphi$ gegenseitig beeinflussen. Ist φ allgemeingültig, so ist $\neg\varphi$ unerfüllbar. Ist φ nicht allgemeingültig, aber dennoch erfüllbar, so gilt das Gleiche für $\neg\varphi$. Damit ist die Allgemeingültigkeit eine exklusive Eigenschaft, die nur eine der beiden Formeln φ oder $\neg\varphi$ erfüllen kann. Im Gegensatz hierzu können sowohl φ als auch $\neg\varphi$ erfüllbar sein.

http://www.springer.com/978-3-8274-2559-1

Grenzen der Mathematik
Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik
Hoffmann, D.W.
2011, X, 409 S. 300 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-8274-2559-1
A product of Spektrum Akademischer Verlag