sind, können wir darauf aufbauen und die ganzen Zahlen definieren. Auf den ganzen Zahlen lässt sich die Theorie der rationalen Zahlen errichten und hierauf wiederum die Theorie der reellen Zahlen. Setzen wir den Abstraktionsprozess fort, so erreichen wir sämtliche Gebiete der gewöhnlichen Mathematik; sie sind die Äste eines Baums, dessen Wurzel im Fundament der Mengenlehre einen festen Halt gefunden hat.

Ein wichtiger Baustein unserer Rechtfertigung steht allerdings noch aus. Wir müssen gewährleisten, dass sich nicht nur die Begriffe, sondern auch die Beweise der gewöhnlichen Mathematik innerhalb der Mengenlehre nachvollziehen lassen. Am Beispiel des folgenden Satzes wollen wir demonstrieren, dass dies tatsächlich gelingt:

Satz 3.3 (Komponentengleichheit geordneter Paare)

Für beliebige geordnete Paare $\langle x,y\rangle$ und $\langle u,v\rangle$ gilt die Beziehung

$$\text{Aus } \langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \text{ folgt } x = u \text{ und } y = v$$

Um zu sehen, wie sich dieser Satz in der gewöhnlichen Sprache der Mathematik beweisen lässt, schlagen wir in einem der Standardwerke nach. In [**?**] lautet der Beweis im Originalwortlaut z. B. so:

> *„Assume $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle$. Then $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$. Since $\{x\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}, \{x\} \in \{\{u\},\{u,v\}\}$. Hence, $\{x\} = \{u\}$ or $\{x\} = \{u,v\}$. In either case, $x = u$. Now, $\{u,v\} \in \{\{u\},\{u,v\}\}$; so, $\{u,v\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}$. Then, $\{u,v\} = \{x\}$ or $\{u,v\} = \{x,y\}$. Similarly, $\{x,y\} = \{u\}$ or $\{x,y\} = \{u,v\}$. If $\{u,v\} = \{x\}$ and $\{x,y\} = \{u\}$, then $x = y = u = v$; if not, $\{u,v\} = \{x,y\}$. Hence, $\{u,v\} = \{u,y\}$. So, if $v \neq u$, then $y = v$; if $v = u$, then $y = v$. Thus, in all cases, $y = v$.“*

Damit wir den Satz überhaupt innerhalb von ZF beweisen können, übersetzen wir ihn zunächst in die formale Schreibweise:

$$\forall \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, \forall \mathsf{u}\, \forall \mathsf{v}\, (\langle \mathsf{x},\mathsf{y}\rangle = \langle \mathsf{u},\mathsf{v}\rangle \rightarrow \mathsf{x} = \mathsf{u} \wedge \mathsf{y} = \mathsf{v})$$

Wir wollen versuchen, den Beweis nicht unnötig zu verkomplizieren. Aus diesem Grund werden wir auf eine Reihe von Hilfstheoremen zurückgreifen, die entweder aussagenlogische Tautologien sind oder elementare Aussagen über die Elementrelation ‚$\in$‘ und die Gleichheitsrelation ‚$=$‘ tätigen. Tabelle 3.5 fasst zusammen, auf welche Theoreme wir dabei im Einzelnen zurückgreifen. Wir gehen davon aus, dass die

Mengentheoretische Hilfstheoreme	
$\xi \in \{\xi,\nu\}$	(H1)
$\xi \in \{\nu,\xi\}$	(H2)
$\xi \in \{\nu,\mu\} \rightarrow (\xi = \nu \vee \xi = \mu)$	(H3)
$\xi \in \nu \rightarrow (\nu = \mu \rightarrow \xi \in \mu)$	(H4)
$\xi = \nu \rightarrow \nu = \xi$	(H5)
$\xi = \nu \rightarrow (\nu = \mu \rightarrow \xi = \mu)$	(H6)
$\nu = \xi \rightarrow (\{\xi,\mu\} = \{\nu,\upsilon\} \rightarrow \{\xi,\mu\} = \{\xi,\upsilon\})$	(H7)
$\{\xi\} = \{\nu\} \rightarrow \xi = \nu$	(H8)
$\{\xi,\nu\} = \{\mu\} \rightarrow \mu = \xi$	(H9)
$\{\xi,\nu\} = \{\mu\} \rightarrow \nu = \mu$	(H10)
$\{\xi,\nu\} = \{\xi,\mu\} \rightarrow \mu = \nu$	(H11)
$\xi = \nu \rightarrow \{\mu,\nu\} = \{\mu,\xi\}$	(H12)

Aussagenlogische Hilfstheoreme	
$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$	(TA1)
$(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\chi \vee \psi) \rightarrow ((\varphi \wedge \chi) \vee \psi))$	(TA2)
$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$	(TA3)
$(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \chi))$	(TA4)
$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$	(TA5)

Tabelle 3.5: Hilfstheoreme für den Beweis von Satz 3.3

Variablen ξ, ν und μ nicht nur durch Variablen, sondern auch durch Mengenkonstrukte wie z. B. $\{x,y\}$ ersetzt werden dürfen.

Eine Warnung vorweg: Widerstehen Sie der Versuchung, die Rolle der Hilfstheoreme zu unterschätzen! Auch wenn sie inhaltlich einer Ansammlung von Trivialitäten gleichen, sind sie nicht in jedem Fall einfach zu beweisen. Führten wir die Beweise zusätzlich auf, so würde sich die nun folgende Ableitung um mehrere Seiten verlängern.

Assume $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle$.	1. $\langle \mathsf{x},\mathsf{y}\rangle = \langle \mathsf{u},\mathsf{v}\rangle \vdash$	
Then $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$.	$\{\{\mathsf{x}\},\{\mathsf{x},\mathsf{y}\}\} = \{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\}$	(Def)
Since $\{x\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}$,	2. $\vdash \{\mathsf{x}\} \in \{\{\mathsf{x}\},\{\mathsf{x},\mathsf{y}\}\}$	(H1)
	3. $\vdash \{\mathsf{x}\} \in \{\{\mathsf{x}\},\{\mathsf{x},\mathsf{y}\}\} \to$	
	$(\{\{\mathsf{x}\},\{\mathsf{x},\mathsf{y}\}\} = \{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\} \to \{\mathsf{x}\} \in \{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\})$	(H4)
	4. $\vdash \{\{\mathsf{x}\},\{\mathsf{x},\mathsf{y}\}\} = \{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\} \to \{\mathsf{x}\} \in \{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\}$	(MP, 2,3)
$\{x\} \in \{\{u\},\{u,v\}\}$.	5. $\langle \mathsf{x},\mathsf{y}\rangle = \langle \mathsf{u},\mathsf{v}\rangle \vdash \{\mathsf{x}\} \in \{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\}$	(MP, 1,4)
	6. $\vdash \{\mathsf{x}\} \in \{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\} \to (\{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u}\} \vee \{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u},\mathsf{v}\})$	(H3)
Hence, $\{x\} = \{u\}$ *or* $\{x\} = \{u,v\}$.	7. $\langle \mathsf{x},\mathsf{y}\rangle = \langle \mathsf{u},\mathsf{v}\rangle \vdash \{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u}\} \vee \{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u},\mathsf{v}\}$	(MP, 5,6)
	8. $\vdash \{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u}\} \to \mathsf{x} = \mathsf{u}$	(H8)
	9. $\vdash \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} = \{\mathsf{x}\} \to \mathsf{x} = \mathsf{u}$	(H9)
	10. $\vdash \{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} \to \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} = \{\mathsf{x}\}$	(H5)
	11. $\{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} \vdash \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} = \{\mathsf{x}\}$	(DT)
	12. $\{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} \vdash \mathsf{x} = \mathsf{u}$	(MP, 9,11)
	13. $\vdash \{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} \to \mathsf{x} = \mathsf{u}$	(DT)
	14. $\vdash (\{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u}\} \vee \{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u},\mathsf{v}\}) \to ((\{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u}\} \to \mathsf{x} = \mathsf{u}) \to$	
	$((\{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} \to \mathsf{x} = \mathsf{u}) \to \mathsf{x} = \mathsf{u}))$	(TA4)
	15. $\langle \mathsf{x},\mathsf{y}\rangle = \langle \mathsf{u},\mathsf{v}\rangle \vdash (\{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u}\} \to \mathsf{x} = \mathsf{u}) \to$	
	$((\{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} \to \mathsf{x} = \mathsf{u}) \to \mathsf{x} = \mathsf{u})$	(MP, 7,14)
	16. $\langle \mathsf{x},\mathsf{y}\rangle = \langle \mathsf{u},\mathsf{v}\rangle \vdash (\{\mathsf{x}\} = \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} \to \mathsf{x} = \mathsf{u}) \to \mathsf{x} = \mathsf{u}$	(MP, 8,15)
In either case, $x = u$.	17. $\langle \mathsf{x},\mathsf{y}\rangle = \langle \mathsf{u},\mathsf{v}\rangle \vdash \mathsf{x} = \mathsf{u}$	(MP, 13,16)
Now, $\{u,v\} \in \{\{u\},\{u,v\}\}$;	18. $\vdash \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} \in \{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\}$	(H2)
	19. $\vdash \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} \in \{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\} \to$	
	$(\{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\} = \{\{\mathsf{x}\},\{\mathsf{x},\mathsf{y}\}\} \to \{\mathsf{u},\mathsf{v}\} \in \{\{\mathsf{x}\},\{\mathsf{x},\mathsf{y}\}\})$	(H4)
	20. $\vdash \{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\} = \{\{\mathsf{x}\},\{\mathsf{x},\mathsf{y}\}\} \to$	
	$\{\mathsf{u},\mathsf{v}\} \in \{\{\mathsf{x}\},\{\mathsf{x},\mathsf{y}\}\}$	(MP, 18,19)
	21. $\vdash \{\{\mathsf{x}\},\{\mathsf{x},\mathsf{y}\}\} = \{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\} \to$	
	$\{\{\mathsf{u}\},\{\mathsf{u},\mathsf{v}\}\} = \{\{\mathsf{x}\},\{\mathsf{x},\mathsf{y}\}\}$	(H5)

22. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \ \vdash \ \{\{u\},\{u,v\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\}$ (MP, 1,21)
23. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \ \vdash \ \{u,v\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}$ (MP, 20,22) *so, $\{u,v\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}$.*
24. $\vdash \ \{u,v\} \in \{\{x\},\{x,y\}\} \to (\{u,v\} = \{x\} \vee \{u,v\} = \{x,y\})$ (H3)
25. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \ \vdash \ \{u,v\} = \{x\} \vee \{u,v\} = \{x,y\}$ (MP, 23,24) *Then, $\{u,v\} = \{x\}$ or $\{u,v\} = \{x,y\}$.*
26. $\vdash \ \{x,y\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}$ (H2) *Similarly,*
27. $\vdash \ \{x,y\} \in \{\{x\},\{x,y\}\} \to$
    $(\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\} \to \{x,y\} \in \{\{u\},\{u,v\}\})$ (H4)
28. $\vdash \ \{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\} \to$
    $\{x,y\} \in \{\{u\},\{u,v\}\}$ (MP, 26,27)
29. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \ \vdash \ \{x,y\} \in \{\{u\},\{u,v\}\}$ (MP, 1,28)
30. $\vdash \ \{x,y\} \in \{\{u\},\{u,v\}\} \to (\{x,y\} = \{u\} \vee \{x,y\} = \{u,v\})$ (H3)
31. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \ \vdash \ \{x,y\} = \{u\} \vee \{x,y\} = \{u,v\}$ (MP, 29,30) *$\{x,y\} = \{u\}$ or $\{x,y\} = \{u,v\}$.*
32. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \ \vdash \ \{x,y\} \neq \{u\} \to \{x,y\} = \{u,v\}$ (31, Def. $\vee$)
33. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle, \{x,y\} \neq \{u\} \ \vdash \ \{x,y\} = \{u,v\}$ (DT)
34. $\vdash \ \{x,y\} = \{u,v\} \to \{u,v\} = \{x,y\}$ (H5)
35. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle, \{x,y\} \neq \{u\} \ \vdash \ \{u,v\} = \{x,y\}$ (MP, 33,34)
36. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \ \vdash \ \{x,y\} \neq \{u\} \to \{u,v\} = \{x,y\}$ (DT)
37. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \ \vdash \ \{x,y\} = \{u\} \vee \{u,v\} = \{x,y\}$ (36, Def. $\vee$)
38. $\vdash \ \{x,y\} = \{u\} \to u = x$ (H9)
39. $\{x,y\} = \{u\} \ \vdash \ u = x$ (DT)
40. $\vdash \ \{x,y\} = \{u\} \to y = u$ (H10)
41. $\{x,y\} = \{u\} \ \vdash \ y = u$ (DT)
42. $\vdash \ y = u \to (u = x \to y = x)$ (H6)
43. $\{x,y\} = \{u\} \ \vdash \ u = x \to y = x$ (MP, 41,42)
44. $\{x,y\} = \{u\} \ \vdash \ y = x$ (MP, 38,43)
45. $\vdash \ y = x \to x = y$ (H5)
46. $\{x,y\} = \{u\} \ \vdash \ x = y$ (MP, 44,45)
47. $\vdash \ \{u,v\} = \{x\} \to x = u$ (H9)
48. $\{u,v\} = \{x\} \ \vdash \ x = u$ (DT)
49. $\vdash \ \{u,v\} = \{x\} \to v = x$ (H10)
50. $\{u,v\} = \{x\} \ \vdash \ v = x$ (DT)
51. $\vdash \ v = x \to (x = u \to v = u)$ (H6)
52. $\{u,v\} = \{x\} \ \vdash \ x = u \to v = u$ (MP, 50,51)
53. $\{u,v\} = \{x\} \ \vdash \ v = u$ (MP, 48,52)
54. $\vdash \ v = u \to u = v$ (H5)

55. $\{u,v\} = \{x\} \vdash u = v$ (MP, 53,54)
56. $\vdash y = u \to (u = v \to y = v)$ (H6)
57. $\{x,y\} = \{u\} \vdash u = v \to y = v$ (MP, 41,56)
58. $\{x,y\} = \{u\}, \{u,v\} = \{x\} \vdash y = v$ (MP, 55,57)
59. $\vdash x = y \to (y = u \to (x = y \wedge y = u))$ (TA1)
60. $\{x,y\} = \{u\} \vdash y = u \to (x = y \wedge y = u)$ (MP, 46,59)
61. $\{x,y\} = \{u\} \vdash x = y \wedge y = u$ (MP, 41,60)
62. $\vdash (x = y \wedge y = u) \to (u = v \to (x = y \wedge y = u \wedge u = v))$ (TA1)
63. $\{x,y\} = \{u\} \vdash u = v \to (x = y \wedge y = u \wedge u = v)$ (MP, 61,62)

If $\{u,v\} = \{x\}$ and $\{x,y\} = \{u\}$, then $x = y = u = v$;

64. $\{x,y\} = \{u\}, \{u,v\} = \{x\} \vdash$
$x = y \wedge y = u \wedge u = v$ (MP, 55,63)
65. $\vdash (\{x,y\} = \{u\} \vee \{u,v\} = \{x,y\}) \to$
$((\{u,v\} = \{x\} \vee \{u,v\} = \{x,y\}) \to$
$((\{x,y\} = \{u\} \wedge \{u,v\} = \{x\}) \vee \{u,v\} = \{x,y\}))$ (TA2)
66. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash (\{u,v\} = \{x\} \vee \{u,v\} = \{x,y\}) \to$
$((\{x,y\} = \{u\} \wedge \{u,v\} = \{x\}) \vee \{u,v\} = \{x,y\})$ (MP, 37,65)
67. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash$
$(\{x,y\} = \{u\} \wedge \{u,v\} = \{x\}) \vee \{u,v\} = \{x,y\}$ (MP, 25,66)
68. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash$
$\neg(\{x,y\} = \{u\} \wedge \{u,v\} = \{x\}) \to \{u,v\} = \{x,y\}$ (67, Def. $\vee$)

if not, $\{u,v\} = \{x,y\}$.

69. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle, \neg(\{x,y\} = \{u\} \wedge \{u,v\} = \{x\}) \vdash$
$\{u,v\} = \{x,y\}$ (DT)
70. $\vdash x = u \to (\{u,v\} = \{x,y\} \to \{u,v\} = \{u,y\})$ (H7)
71. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash \{u,v\} = \{x,y\} \to \{u,v\} = \{u,y\}$ (MP, 17,70)
72. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle, \neg(\{x,y\} = \{u\} \wedge \{u,v\} = \{x\}) \vdash$
$\{u,v\} = \{u,y\}$ (MP, 69,71)
73. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash$
$\neg(\{x,y\} = \{u\} \wedge \{u,v\} = \{x\}) \to \{u,v\} = \{u,y\}$ (DT)
74. $\vdash y = v \to \{u,v\} = \{u,y\}$ (H12)
75. $\{x,y\} = \{u\}, \{u,v\} = \{x\} \vdash \{u,v\} = \{u,y\}$ (MP, 58,74)
76. $\{x,y\} = \{u\} \vdash \{u,v\} = \{x\} \to \{u,v\} = \{u,y\}$ (DT)
77. $\vdash \{x,y\} = \{u\} \to (\{u,v\} = \{x\} \to \{u,v\} = \{u,y\})$ (DT)
78. $\vdash (\{x,y\} = \{u\} \to (\{u,v\} = \{x\} \to \{u,v\} = \{u,y\})) \to$
$(\{x,y\} = \{u\} \wedge \{u,v\} = \{x\} \to \{u,v\} = \{u,y\})$ (TA5)
79. $\vdash \{x,y\} = \{u\} \wedge \{u,v\} = \{x\} \to \{u,v\} = \{u,y\}$ (MP, 77,78)

80. $\vdash$ $((\{x,y\} = \{u\} \land \{u,v\} = \{x\}) \to \{u,v\} = \{u,y\}) \to$
$((\neg(\{x,y\} = \{u\} \land \{u,v\} = \{x\}) \to \{u,v\} = \{u,y\}) \to$
$\{u,v\} = \{u,y\})$ (TA3)
81. $\vdash$ $(\neg(\{x,y\} = \{u\} \land \{u,v\} = \{x\}) \to \{u,v\} = \{u,y\})$
$\to \{u,v\} = \{u,y\}$ (MP, 79,80)
82. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash \{u,v\} = \{u,y\}$ (MP, 73,81) *Hence, $\{u,v\} = \{u,y\}$.*
83. $v \neq u \vdash \{u,v\} = \{u,y\} \to y = v$ (H11)
84. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle, v \neq u \vdash y = v$ (MP, 82,83) *So, if $v \neq u$, then $y = v$;*
85. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash v \neq u \to y = v$ (DT)
86. $v = u \vdash \{u,v\} = \{u,y\} \to y = v$ (H11)
87. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle, v = u \vdash y = v$ (MP, 82,86) *if $v = u$, then $y = v$.*
88. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash v = u \to y = v$ (DT)
89. $\vdash$ $(v = u \to y = v) \to ((v \neq u \to y = v) \to y = v)$ (TA3)
90. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash (v \neq u \to y = v) \to y = v$ (MP, 88,89)
91. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash y = v$ (MP, 85,90) *Thus, in all cases, $y = v$.*
92. $\vdash$ $x = u \to (y = v \to (x = u \land y = v))$ (TA1)
93. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash y = v \to (x = u \land y = v)$ (MP, 17,92)
94. $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \vdash x = u \land y = v$ (MP, 91,93)
95. $\vdash$ $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \to x = u \land y = v$ (DT)
96. $\vdash$ $\forall x\, \forall y\, \forall u\, \forall v\, (\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \to x = u \land y = v)$ (G, 4 mal)

Ein gehöriges Stück Arbeit liegt hinter uns! Auch wenn der Inhalt der bewiesenen Aussage nur wenig Aufsehen erregt, so ist die Komplexität des Beweises wahrlich beeindruckend. Das Beispiel zeigt nachdrücklich, wie schwierig die Beweisführung selbst für scheinbar naheliegende Aussagen ist. Doch seien Sie beruhigt. Niemand wird von Ihnen verlangen, komplizierte Theoreme auf einer solch tiefen Abstraktionsebene zu Fuß abzuleiten, geschweige denn auf die Idee kommen, die symbolische Ebene der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre als das Handwerkszeug einer neuen Mathematik auszurufen. In ihrer täglichen Arbeit werden Mathematiker aller Fachrichtungen auch in Zukunft Beweise auf der uns vertrauten Abstraktionsebene führen, auf der sich Formeln und umgangssprachliche Formulierungen in vertrauter Symbiose befinden. Nur so sind wir als Mensch überhaupt in der Lage, komplexe Theoreme zu beweisen. Was an dieser Stelle zählt, ist einzig und allein das Wissen, dass sich alle gezogenen Schlussfolgerungen soweit formalisieren lassen, dass sie auf der untersten Ebene einer symbolischen Manipulation von Zeichenketten gleichkommen.