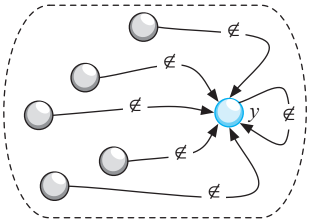
der Zermelo-Fraenkel'schen. Das Aussonderungsaxiom ist damit prinzipiell entbehrlich und manche Bücher wie z. B. [212] führen die ZF-Mengenlehre konsequenterweise mit nur 8 Axiomen ein. In den meisten Darstellungen wird das Aussonderungsaxiom trotzdem als Axiom aufgeführt und auch wir wollen uns dieser Gepflogenheit nicht widersetzen.

Axiom der Fundierung
(auch Axiom der Regularität)



■ $\forall x\,(x \neq \emptyset \rightarrow \exists (y \in x)\; x \cap y = \emptyset)$

> *„Jede (rückschreitende) Kette von Elementen, in welcher jedes Glied Element des vorangehenden ist, bricht mit endlichem Index ab bei einem Urelement. Oder, was gleichbedeutend ist: Jeder Teilbereich T [$\neq \emptyset$] enthält wenigstens ein Element t_0, das kein Element t in T hat."*
>
> Ernst Zermelo, 1930

Die bisher formulierten Axiome gestatten es uns, Mengen explizit zu konstruieren; sie schließen aber nicht aus, dass daneben noch andere Mengen existieren. Um solche ungebetenen Gäste fern zu halten, formuliere Fraenkel das sogenannte *Beschränktheitsaxiom*, das dem Bereich der Mengen *„den geringsten mit den übrigen Axiomen verträglichen Umfang"* auferlegte [53].

John von Neumann war mit der Formulierung dieses Axioms unzufrieden, da es sich inhaltlich auf die anderen Axiome bezieht. In seiner Mengenlehre aus dem Jahr 1925 ersetzte er es durch das Axiom der Fundierung, das unendlich absteigende Inklusionsketten verbietet. Das Axiom wurde 1930 von Zermelo aufgegriffen und in die oben zitierte Form gebracht. Es besagt, dass wir in jeder nichtleeren Menge x ein Element y vorfinden können, dessen Elemente allesamt von den Elementen von x verschieden sind (☞ $x \cap y = \emptyset$).

Die Auswirkungen des Fundierungsaxioms sind größer, als es der erste Blick erwarten lässt. Zunächst halten wir fest, dass keine Menge existieren kann, die sich selbst als Element enthält (Abbildung 3.8). Um dies einzusehen, nehmen wir an, es gäbe eine Menge x_1 mit $x_1 \in x_1$. Dann würde die Menge $x = \{x_1\}$ unmittelbar gegen das Fundierungsaxiom verstoßen, da x und x_1 ein gemeinsames Element besäßen (wegen $x_1 \in x_1$ gilt $x \cap x_1 = \{x_1\} \neq \emptyset$). Das Fundierungsaxiom verhindert die Selbstinklusion sogar dann, wenn sie in Form einer *Ringinklusion* vorkommt, die sich über mehrere Hierarchiestufen erstreckt. Gäbe es tatsächlich Mengen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ mit

$$x_1 \in x_2 \in x_3 \in \ldots \in x_n \in x_1$$

so würde die Menge $x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ die Forderung des Fundierungsaxioms verletzen; jedes Element dieser Menge enthielte ein Element, das in x ebenfalls enthalten ist.

Gleichermaßen unterbunden werden unendlich absteigende Inklusionsketten der Form

$$x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ldots$$

In diesem Fall steht die Menge $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ im Widerspruch zur Aussage des Fundierungsaxioms. Beachten Sie, dass die Umkehrung in diesem Fall nicht gilt. Unendlich aufsteigende Folgen

$$x_1 \in x_2 \in x_3 \ldots$$

sind mit dem Axiom durchaus verträglich.

Ganz nebenbei demonstriert das Fundierungsaxiom auch, wie wichtig die eingeführten Schreiberleichterungen sind, um die Lesbarkeit von Formeln sicherzustellen. Abbildung 3.9 zeigt, in welchem Gewand das Fundierungsaxiom erscheinen würde, wenn wir auf sämtliche Schreiberleichterungen verzichteten. Die wahre Bedeutung des Axioms ist jetzt kaum noch zu erkennen und verschwindet fast vollständig im Nebel der formalen Nomenklatur.

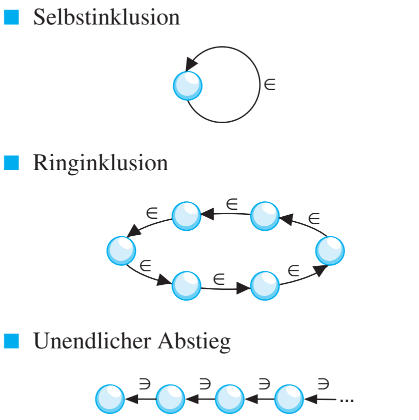


Abbildung 3.8: Das Fundierungsaxiom hält Mengen fern, die sich unmittelbar oder mittelbar selbst enthalten oder eine endlos absteigende Inklusionskette bilden.

- Axiom der Fundierung

Ernst Zermelo (1871 – 1953)

„Jeder Teilbereich T [$\neq \emptyset$] enthält wenigstens ein Element t_0, das kein Element t in T hat.“

- $\forall x\, (x \neq \emptyset \rightarrow \exists (y \in x)\; x \cap y = \emptyset)$

$\varphi(\emptyset) := \exists e\, ((\forall z\; z \notin e) \wedge \varphi(e))$

- $\exists e\, ((\forall z\; z \notin e) \wedge \forall x\, (x \neq e \rightarrow \exists (y \in x)\; x \cap y = e))$

$\exists (y \in x)\; \varphi := \exists y\, (y \in x \wedge \varphi)$

- $\exists e\, ((\forall z\; z \notin e) \wedge \forall x\, (x \neq e \rightarrow \exists y\, (y \in x \wedge x \cap y = e)))$

$\varphi(x \cap y) := \exists c\, (\forall b\, (b \in c \leftrightarrow b \in x \wedge b \in y) \wedge \varphi(c))$

- $\exists c\, (\forall b\, (b \in c \leftrightarrow b \in x \wedge b \in y) \wedge \exists e\, ((\forall z\; z \notin e) \wedge \forall x\, (x \neq e \rightarrow \exists y\, (y \in x \wedge c = e))))$

$x \notin y := \neg(x \in y), x \neq y = \neg(x = y)$

- $\exists c\, (\forall b\, (b \in c \leftrightarrow b \in x \wedge b \in y) \wedge \exists e\, ((\forall z\, \neg(z \in e)) \wedge \forall x\, (\neg(x = e) \rightarrow \exists y\, (y \in x \wedge c = e))))$

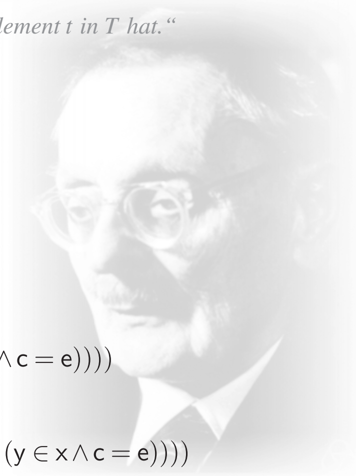


Abbildung 3.9: Ohne die vereinbarten Schreiberleichterungen wird das Fundierungsaxiom zu einem wahren Monster.