



Vorwort

„Curiously, though, despite the importance of Cohen’s work and the passage of nearly fifty years, forcing remains totally mysterious to the vast majority of mathematicians, even those who know a little mathematical logic. Although there exist numerous textbooks with mathematically correct and complete proofs of the basic theorems of forcing, the subject remains notoriously difficult for beginners to learn. [...] I believe that it is an open exposition problem to explain forcing.“

Timothy Y. Chow [9]

Das Unmögliche zu erkennen, ist eine intellektuelle Leistung, die den Menschen einzigartig macht. Mit diesem Satz beginnt ein Buch, das ich vor wenigen Jahren über die Grenzen der Mathematik verfasst habe [27]. Es beschäftigt sich ausführlich mit den Geschehnissen, die zu Beginn des 20. Jahrhunderts zu einem nachhaltigen Umbruch in der Mathematik geführt haben, und schließt mit einem Ausflug in die Modelltheorie. Dies ist jenes Gebiet der mathematischen Logik, in der auch die von Paul Cohen entwickelte Forcing-Technik zuhause ist.

Cohens Entdeckung ist zu komplex, als dass ich sie damals mit all ihren Details in mein Buch hätte integrieren können, und so wuchs in mir der Drang, dieses Thema separat aufzubereiten. Das vor Ihnen liegende Buch ist das Ergebnis meiner Bemühungen. Trotz der inhaltlichen Überschneidungen mit meinem oben genannten Werk ist dieses Buch ein völlig anderes geworden. Für die *Grenzen der Mathematik* hatte ich eine Darstellungsebene gewählt, die sich zwischen einem traditionellen Lehrbuch und einem Fachbuch bewegt. Es war mir damals wichtig, vor allem die Konzepte und die Ideen zu vermitteln, von denen die mathematische Logik lebt. Mein neues Projekt hatte ich mit derselben Intention gestartet, jedoch schnell erkannt, dass ein solcher Ansatz dieses Mal nicht funktioniert. Cohens Forcing-Technik ist wie ein Uhrwerk, in dem unzählige Rädchen so trickreich ineinandergreifen, dass nichts Konkretes übrig bleibt, wenn wir die Details verlassen. Anders als die *Grenzen der Mathematik* habe ich dieses Buch daher ganz bewusst im Sinne eines traditionellen Lehrbuchs verfasst.

Nichtsdestotrotz ist es mir auch dieses Mal ein Anliegen, den Blick auf das Große und Ganze zu wahren. Zu diesem Zweck wird die Forcing-Technik in Kapitel 1 zunächst

in groben Zügen erläutert, ohne große Rücksicht auf Details. Im Anschluss daran folgen drei Grundlagenkapitel, in denen die zum Verständnis notwendigen Kenntnisse aus der Mengenlehre, der Logik und der Algebra vermittelt werden. Danach wird die Forcing-Technik in allen Details Schritt für Schritt entwickelt und im letzten Kapitel dafür verwendet, um die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese zu beweisen.

Heute ist die Forcing-Technik das Standardverfahren für das Führen von Unabhängigkeitsbeweisen, und es sind zahlreiche Bücher auf dem Markt, die sich mit dieser Thematik beschäftigen. Trotzdem ist der Kreis derer, die ein tiefgehendes Verständnis der Forcing-Technik besitzen, immer noch vergleichsweise klein. Die mehr als 50 Jahre, die seit Cohens Entdeckung vergangen sind, haben nichts daran geändert, dass die mathematischen Details fast ausschließlich von erfahrenen Mengentheoretikern durchdrungen werden.

Timothy Y. Chow, dem wir eine exzellente Kurzeinführung in die Forcing-Technik zu verdanken haben, spricht in diesem Zusammenhang von einem „*open exposition problem*“ [9]. Seine Beschreibung könnte treffender nicht sein. Genau wie Chow bin ich der Meinung, dass sich das Darstellungsproblem nur über die Zeit hinweg lösen lässt, durch das Engagement ganz unterschiedlicher Autoren, deren Ideen sich gegenseitig befruchten. Mit diesem Buch möchte ich meinen persönlichen Beitrag dazu leisten. Es ist mein bescheidener Versuch, die Forcing-Technik ein Stück weit aus der alchemistischen Ecke zu rücken, in der Cohens Werk von vielen immer noch gesehen wird.

Der mathematische Unterbau der Forcing-Technik ist komplex, und es wäre unlauter, in der Hoffnung auf einen größeren Leserkreis das Gegenteil zu behaupten. Das Verständnis von Cohens Ideen setzt ein hohes Maß an abstraktem Denkvermögen voraus, das von den meisten Menschen erst im Laufe eines Studiums der Mathematik oder der Naturwissenschaften entwickelt wird. Aus diesem Grund richte ich mich mit diesem Buch in erster Linie an die Studenten und Absolventen der Universitätsstudiengänge Mathematik, Informatik und Physik, doch selbstverständlich heiße ich auch alle anderen Leser auf das Herzlichste willkommen, die im Bereich der mathematischen Begriffsbildung schon ausreichend Erfahrung gesammelt haben.

Damit das Buch zum Selbststudium genutzt werden kann, habe ich alle Kapitel mit zahlreichen Übungsaufgaben versehen, deren Lösungen unter der folgenden Adresse im Internet abgerufen werden können:

<http://www.dirkwhoffmann.de/forcing>