



# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
1.1	Das mathematisch Unendliche . . . . .	11
1.1.1	Die Kardinalzahlreihe . . . . .	12
1.1.2	Die Kontinuumshypothese . . . . .	18
1.2	Unabhängigkeitsbeweise . . . . .	24
1.2.1	Modellkonstruktion . . . . .	25
1.2.2	Innere und äußere Modelle . . . . .	29
1.3	Forcing . . . . .	31
1.4	Übungsaufgaben . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Mengen</b>	<b>39</b>
2.1	Der Mengenbegriff . . . . .	41
2.1.1	Naive Mengenlehre . . . . .	41
2.1.2	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre . . . . .	44
2.2	Transitive Mengen . . . . .	52
2.3	Geordnete Mengen . . . . .	56
2.3.1	Halbordnungen . . . . .	57
2.3.2	Lineare Ordnungen . . . . .	65
2.3.3	Wohlordnungen . . . . .	67
2.4	Mostowski-Kollaps . . . . .	71
2.5	Ordinalzahlen . . . . .	78
2.5.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	78
2.5.2	Kumulative Hierarchie . . . . .	91
2.6	Kardinalzahlen . . . . .	96
2.6.1	Mächtigkeit . . . . .	97
2.6.2	Die Aleph-Reihe . . . . .	101
2.7	Übungsaufgaben . . . . .	111
<b>3</b>	<b>Formale Systeme</b>	<b>133</b>
3.1	Aussagenlogik . . . . .	134
3.1.1	Syntax . . . . .	134
3.1.2	Semantik . . . . .	137
3.1.3	Formale Beweise . . . . .	140
3.2	Prädikatenlogik . . . . .	142

3.2.1	Syntax . . . . .	142
3.2.2	Semantik . . . . .	144
3.2.3	Formale Beweise . . . . .	147
3.3	Formalisierung der Mengenlehre . . . . .	150
3.3.1	Theorieaxiome . . . . .	151
3.3.1.1	Arithmetische Hierarchie . . . . .	155
3.3.2	Abgeleitete Sprachkonstrukte . . . . .	156
3.4	Modelle der Mengenlehre . . . . .	161
3.4.1	Modellexistenz . . . . .	162
3.4.2	Standardmodelle . . . . .	164
3.4.3	Absolutheit . . . . .	167
3.5	Übungsaufgaben . . . . .	171
<b>4</b>	<b>Boolesche Algebren</b>	<b>179</b>
4.1	Charakterisierungen . . . . .	180
4.1.1	Charakterisierung als algebraische Struktur . . . . .	180
4.1.2	Charakterisierung als Ordnungsstruktur . . . . .	188
4.2	Beispiele . . . . .	194
4.3	Klassifikation . . . . .	196
4.3.1	Atomare boolesche Algebren . . . . .	196
4.3.2	Vollständige boolesche Algebren . . . . .	198
4.4	Antiketten und Separation . . . . .	204
4.5	Abgeleitete Strukturen . . . . .	208
4.5.1	Unteralgebren . . . . .	208
4.5.2	Homomorphismen . . . . .	211
4.5.3	Filter und Ideale . . . . .	215
4.5.4	Quotientenalgebren . . . . .	226
4.6	Generische Filter . . . . .	230
4.6.1	Dichte Teilmengen . . . . .	231
4.6.2	Existenzlemma von Rasiowa-Sikorski . . . . .	235
4.7	Einbettung von Halbordnungen . . . . .	240
4.8	Übungsaufgaben . . . . .	251
<b>5</b>	<b>Boolesche Modelle</b>	<b>273</b>
5.1	Das Modell $\mathcal{M}^{(B)}$ . . . . .	273
5.1.1	Boolesche Mengen . . . . .	274
5.1.2	Die Wahrheitsfunktion $[[\cdot]]$ . . . . .	279
5.1.3	Beispiele . . . . .	288
5.2	Wahrheit der Logiktheoreme . . . . .	292
5.2.1	Aussagenlogik . . . . .	292
5.2.2	Prädikatenlogik . . . . .	294

5.2.3	Gleichheit . . . . .	296
5.3	Unterstrukturen . . . . .	304
5.3.1	Unteralgebren . . . . .	304
5.3.2	Standardrepräsentanten . . . . .	306
5.4	Maximumprinzip . . . . .	316
5.5	Wahrheit der ZFC-Theoreme . . . . .	322
5.6	Übungsaufgaben . . . . .	338
<b>6</b>	<b>Ordinal- und Kardinalzahlen in <math>\mathcal{M}^{(B)}</math></b>	<b>349</b>
6.1	Boolesche Ordinalzahlen . . . . .	349
6.2	Boolesche Kardinalzahlen . . . . .	358
6.3	Übungsaufgaben . . . . .	370
<b>7</b>	<b>Modelltransformation</b>	<b>371</b>
7.1	Das Quotientenmodell $\mathcal{M}^{(B)}/U$ . . . . .	371
7.2	Das Modell $\mathcal{M}[U]$ . . . . .	380
7.3	Übungsaufgaben . . . . .	389
<b>8</b>	<b>Unabhängigkeitsbeweise</b>	<b>391</b>
8.1	Forcing . . . . .	391
8.1.1	Forcing-Ordnungen . . . . .	392
8.1.2	Die Forcing-Relation . . . . .	400
8.2	Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese . . . . .	408
8.2.1	Adjunktion von CH . . . . .	408
8.2.2	Adjunktion von $\neg$ CH . . . . .	412
8.3	Übungsaufgaben . . . . .	418
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>421</b>
	<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>425</b>